Algebra 1 — zadania przygotowawcze do drugiego kolokwium

Poniżej znajduje się w sumie 20 zadań, które w wersji dosłownej mają marne szanse znaleźć się na kolokwium, ale być może znajdą się na nim pewne ich modyfikacje.

Zad. 1.

Niech p będzie liczbą pierwszą. Określmy podgrupę T grupy $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}_p)$ w następujący sposób:

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

1. Pokazać, że T jest p-podgrupą Sylowa w $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}_p)$.
2. Wyznaczyć normalizator podgrupy T w $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}_p)$.
3. Wyznaczyć liczbę różnych p-podgrup Sylowa w $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}_p)$.

Zad. 2.

Wyznaczyć komutant grupy S_n.

Zad. 3.

Niech p będzie liczbą pierwszą dzielącą liczbę $2n$. Wyznaczyć wszystkie p-podgrupy Sylowa w grupie dihedralnej D_n. Dla dowolnych dwóch p-podgrup Sylowa S_1 i S_2 wskazać element $g \in D_n$ taki, że $S_1 = gS_2g^{-1}$.

Zad. 4.

Niech p będzie liczbą pierwszą. Wyznaczyć liczbę różnych p-podgrup Sylowa w grupie S_p.

Zad. 5.

Wykazać, że wszystkie podgrupy Sylowa w grupie rzędu 100 są przemienne.

Zad. 6.

Wykazać, że nie istnieje grupa prosta rzędu 80.

Zad. 7.

W jakich 2-podgrupach Sylowa grupy S_4 jest zawarta permutacja (13)?

Zad. 8.

Pokazać, że grupa ilorazowa $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_3)/Z(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_3))$ jest izomorficzna z grupą S_4.

Zad. 9.

Czy można rozłożyć na iloczyn prosty nietrywialnych podgrup grupy S_3, A_4, Q_8?

Zad. 10.
Ile jest podgrup rzędu 2 i 6 w niecyklicznej grupie abelowej rzędu 12?

Pozostałe zadania przygotowawcze podaję podając tylko numer ze skryptu A. Bojanowskiej i P. Traczyka:
Z 5.1, Z 5.2, Z 5.3, Z 5.4, Z 5.5, Z 5.8, Z 5.9, Z 6.16, Z 7.1, Z 7.3

Oprócz tego co wyżej oczywiście obowiązują zadania z ćwiczeń i teoria (być może trzeba będzie podać jakąś definicję lub twierdzenie).