Algebra 1 — zadania przygotowawcze do kolokwium

Poniżej znajduje się w sumie 20 zadań, które w wersji dosłownej mają marne szanse znaleźć się na kolokwium, ale być może znajdą się na nim pewne ich modyfikacje.

Zad. 1.

Niech p będzie liczbą pierwszą. Określmy podgrupę T grupy $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Z}_p)$ w następujący sposób:

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

Pokazać, że G jest grupą abelową i znaleźć jej rząd.

Zad. 2.

Wyznaczyć rozkład na klasy sprzężoności dla grup S_3, A_4 i D_4.

Zad. 3.

Wyznaczyć liczbę klas sprzężoności w grupie dihedralnej D_n.

Zad. 4.

Wyznaczyć centralizator cyklu $(12\ldots n)$ w grupie S_n.

Zad. 5.

Niech H będzie podgrupą indeksu 2 w G. Niech S będzie pewną klasą sprzężoności grupy G i załóżmy, że $S \subset H$. Pokazać, że S zawiera co najwyżej dwie klasy sprzężności grupy H.

Zad. 6.

Wyznaczyć centrum grup A_n i $\mathrm{GL}(n;\mathbb{Z})$.

Zad. 7.

Niech G będzie podgrupą grupy S_{10} generowaną przez permutację

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Wyznaczyć orbity i stabilizatory działania grupy G na zbiorze $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Zad. 8.

a) Pokazać, że jeśli dwie podgrupy H i K pewnej skończonej grupy G są sprzężone i $H \subset K$, to $H = K$.

b) Określmy podgrupy H i K grupy $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$ w następujący sposób:

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\} \qquad K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Pokazać, że H i K są sprzężone w $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$ i H jest zawarte w K.

Zad. 9.

(a) Czy grupa D_4 jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

(b) Czy grupa D_6 jest izomorficzna z S_3?

Pozostałe zadania przygotowawcze podaję podając tylko numer ze skryptu A. Bojanowskiej i P. Traczyka:

Z 1.9, Z 2.8, Z 2.12, Z 2.23, Z 2.25, Z 2.30, Z 3.3, Z 3.7, Z 3.12, Z 4.26, Z 4.28.

Oprócz tego co wyżej oczywiście obowiązują zadania z ćwiczeń i teoria (być może trzeba będzie podać jakąś definicję lub twierdzenie).