Zadania na indukcję

10. Wykazać, że jeśli n jest liczbą naturalną parzystą, to liczba $n^3 + 20n$ dzieli się przez 48 $(= 3 \cdot 2^4)$.

11. Dany jest ciąg (a_n) taki, że $a_1 = 1$, $a_2 = 8$ oraz $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dla $n \geq 3$. Wykazać, że $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

~~**12.** Zaczynając od 0, dwóch graczy na przemian dodaje 1, 2 lub 3 do bieżącej wartości sumy. Wygrywa gracz, który pierwszy uzyska sumę co najmniej 1000. Udowodnić, że drugi gracz ma strategię wygrywającą, niezależnie od strategii gracza pierwszego.~~

13. Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$

(i) $\frac{7^n-1}{6} \in \mathbb{N}$,

~~(ii)~~ $\cancel{\frac{n^3+5n}{6} \in \mathbb{N}}$.

~~**14.** Udowodnić, że dla każdego~~ $\cancel{n \in \mathbb{N}}$ ~~zachodzi nierówność~~

$$\cancel{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{7}{12}}.$$