1.

4. Wykaż w sposób całkowicie ścisły (wskazując na każdym kroku rozumowania z jakiego aksjomatu lub uprzednio wykazanego twierdzenia należy skorzystać) **kilka** elementarnych własności liczb rzeczywistych — **np.**: te poniższe:

   (a) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\ a \cdot 0 = 0$;

   (b) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\ (-1) \cdot a = -a$;

   (c) $\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ -(a+b) = -a-b$;

   (d) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\ a^2 \geqslant 0$;

2.

1. Wykaż następujące tożsamości i nierówności:

   $\forall$ (a) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$;

   (b) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ dla $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$ (wzór Newtona, fakt str. 19);

   $\forall$ (c) $|a| + |b| \geqslant |a-b| \geqslant ||a| - |b||$ dla $a, b \in \mathbb{R}$;

   $\forall$ (d) $|\sum_{k=1}^{n} x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ dla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$;

   (e) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ dla $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$;

   $\forall$ (f) $n! \leqslant (\frac{n+1}{2})^n$ dla $n \in \mathbb{N}$;

   Uwaga: w a), b) przyjmujemy $0^0 = 1$.

3.

3. Niech p_n oznacza n-tą z kolei liczbę pierwszą. Wykaż, że $\forall_{n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 12}\ p_n \geqslant 3n$.

   Uwaga: tu można użyć wiedzy „szkolnej", a nie tylko tej z wykładu. Np. zakładam, że każdy student orientuje się co to jest liczba pierwsza (a zatem $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ itd).

4.

5. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą niepuste i ograniczone. Czy istnieje wzór wyrażający:

   (a) $\sup(A \cup B)$,

   (b) $\inf(A \cup B)$,

   (c) $\sup(A \cap B)$,

   (d) $\inf(A \cap B)$

   przy pomocy kresów zbiorów A i B? Jeśli tak, to znajdź taki wzór (i udowodnij), a jeśli nie, to wykaż, że nie istnieje.

5.

6. Niech I będzie pewnym niepustym zbiorem („indeksów") oraz dla każdego $i \in I$ niech $A_i \subset \mathbb{R}$ będzie niepusty i ograniczony z góry. Udowodnij, że $\sup(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sup\{\sup A_i : i \in I\}$.

6.

7. Wykaż, że jeśli $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste i ograniczone z góry, to:

   (a) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$;

   (b) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup(B)$ przy dodatkowym założeniu, że $A, B > 0$;

   (c) $\inf(-A) = -\sup(A)$.

   Uwaga: w dowodzie pkt. a) można np. wykorzystać wynik z zadania 6 oraz szczególną wersję pkt. a) dla $A = \{a\}$. Dla b) — analogicznie.

7.

10. Znajdź oba kresy zbiorów:

   (a) $\{a^2 - ab : a, b \in (0; 1)\}$;

   (b) $\{|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| : n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\}$;

   $\forall$ (c) $\{\frac{n-k}{n+k} : n, k \in \mathbb{N}\}$.

8.

10. Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ i niech c będzie ograniczeniem górnym A. Wykaż, że $c = \sup A$ wtw istnieje ciąg $\{a_n\}$ złożony z elementów zbioru A taki, że $a_n \to c$.

9.

11. Znajdź $\sup A$ oraz $\inf A$ dla $A =$

   (a) $\{\frac{n}{m} + \frac{m}{n} : n, m \in \mathbb{N}\}$;

   (b) $\{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} : a, b, c > 0\}$.

10.

Znajdź sup A oraz inf A dla A=

$$\left\{\frac{1}{\sqrt[m]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}}, n, m \in \mathbb{N}\right\}$$