1.

8. Wykaż poniższe nierówności, wykorzystując twierdzenia rachunku różniczkowego (tj. dotyczące pochodnych):

(a) $(x+y)^\alpha \leqslant (\geqslant) x^\alpha + y^\alpha$ dla $x, y \geqslant 0$ i $\alpha \leqslant (\geqslant) 1$;

(b) $xe^{-x^2} + ye^{-y^2} + ze^{-z^2} \leqslant \sqrt{\frac{9}{2e}}$ dla $x, y, z \in \mathbb{R}$;

(c) $\ln(1+x) > (<) x - \frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$ $(-1 < x < 0)$;

(d) $\sqrt[3]{1+x} > 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$ dla $x > 0$.

9. Znajdź pewne (ewentualnie wersja troszkę trudniejsza: wszystkie) takie $\alpha \in \mathbb{R}$, że dla dowolnego $x > -1$ zachodzi $\ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \alpha x^3$.

2.

10. Ile pierwiastków (tzn. rozwiązań) posiada równanie (x jest “niewiadomą”, $x \in \mathbb{R}$):

(a) $x^{11} - 11x + 1 = 0$;

(b) $6\ln(x^2+1) = e^x$;

(c) $a^x = x$, w zależności od parametru $a > 0$.

3.

22. Znajdź poniższe granice. Każdy z przykładów **spróbuj** zbadać korzystając z reguły de l'Hospitala i **odrębnie**, korzystając ze wzoru Taylora.

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$;

(b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1+} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$;

(d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{1-\cos x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} x - x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})$;

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\ln(1+x)+x^3}{\sqrt{1-e^{-x^4}}}$;

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + e^x - (1+2x+\frac{x^2}{2})}{x^4}$.

4.

23. Znajdź przybliżenia wymierne poniższych liczb z podaną dokładnością d:

(a) $\sqrt{e}$, $d = 0,001$;

(b) $\cos^2 1$, $d = 0,001$;

(c) $\ln(\frac{3}{2})$, $d = \frac{1}{20}$.

5.

24. Poniższe liczby zapisz w postaci sum szeregów o wyrazach wymiernych:

(a) $\frac{\sin\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$;

(b) $\ln(\frac{8}{3})$;

(c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

6.

27. Wykorzystując wzór Taylora zbadaj zbieżność poniższych szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\right)$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n}\right)$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty}|\mathrm{tg}(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \frac{1}{\sqrt{n}}|^\alpha$ w zależności od $\alpha > 0$;

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{a} - \frac{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{2}\right)$ w zależności od $a, b, c > 0$.

7.

29. Wykaż, że $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ dla $x \in [0;1)$ w oparciu o twierdzenie Lagrange'a o postaci reszty Taylora (twierdzenie V.11).