Równania różniczkowe zwyczajne – ćwiczenia 17

19 czerwca 2013

1. Narysować diagram bifurkacyjny (zaznaczając przerywaną linią równowagę niestabilną, a ciągłą stabilną) dla równania

a) $\dot{x} = -x^2 + \mu$;

b) $\dot{x} = -x^3 + \mu x$.

2. Zbadać stabilność korzystając z funkcji V:

a) $\ddot{x} + x = 0$ (sprowadzić do układu równań).

b) $\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x - 3y^3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + x^2y^2, \\ \dot{y} = x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2}. \end{cases}$

$V(x, y)$ postaci $ax^2 + bx^2$.

d) $\begin{cases} \dot{v} = -\sin x, \\ \dot{x} = v. \end{cases}$

$V(x, y) = \frac{v^2}{2} - \cos x$.

3. Model drapieżnik-ofiara (albo model Lotki-Volterry)

$\begin{cases} \dot{V} = rV - aVP, \\ \dot{P} = -bP + \gamma aVP, \end{cases}$

gdzie V, P – opisują zagęszczenie drapieżnika i ofiary, r – tempo rozrodczości ofiar, $\frac{1}{b}$ – średni czas życia drapieżnika, a – współczynnik sukcesu w polowaniu, γ – jaka część upolowanej ofiary jest przeznaczana na reprodukcję drapieżnika.

Przez odpowiednie skalowanie można sprowadzić układ do postaci

$\begin{cases} \dot{x} = x - xy, \\ \dot{y} = -\alpha y + xy; \end{cases}$

a) Znaleźć skalowanie. Jak stała α zależy od stałych modelu pierwotnego?

b) Pokazać, że jeśli $x_0, y_0 > 0$, to rozwiązanie ma obie współrzędne dodatnie.

c) Znaleźć całki pierwsze układu.

d) Udowodnić, że orbity układu znajdujące się we wnętrzu pierwszej ćwiartki są orbitami zamkniętymi.