Równania różniczkowe zwyczajne – ćwiczenia 13

15 maja 2013

1. Rozwiązać następujące niejednorodne układy równań:

a) $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 + x_2 - t^2 + t - 2; \\ \dot{x_2} = -2x_1 + 4x_2 + 2t^2 - 4t - 7. \end{cases}$

b) $\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

c) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 14e^{3t} \\ 16t \end{bmatrix}$

2. Rozważmy równanie liniowe niejednorodne $\dot{x} = A(t)x + b_1(t) + b_2(t)$, gdzie $A(t)$ – macierz $n \times n$, $x(t), b_1(t), b_2(t) \in \mathbb{R}$.

Niech X – macierz fundamentalna równania jednorodnego,
$\bar{x}$ – rozwiązanie szczególne równania $\dot{x} = A(t)x + b_1(t)$, a
$\tilde{x}$ – rozwiązanie szczególne równania $\dot{x} = A(t)x + b_2(t)$.

Znaleźć rozwiązanie ogólne wyjściowego równania.

3. Udowodnić, że jeśli $\Re\lambda_i < 0$ dla wszystkich wartości własnych wielomianu charakterystycznego macierzy A, to wszystkie rozwiązania równania $\dot{x} = Ax$ spełniające $x(t_0) = x_0$, spełniają $\|x(t)\| \leqslant Me^{at}$ dla pewnych $a < 0$ i $M > 0$.

4. Sprowadzić układy równań drugiego rzędu do układów równań pierwszego rzędu i rozwiązać:

a) $\begin{cases} \ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 + \dot{x}_2 + x_1 - 3x_2 = 0, \\ 4\ddot{x}_2 - 2\ddot{x}_1 - \dot{x}_1 - 2x_1 + 5x_2 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \ddot{x}_1 - 3x_1 - 4x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$