

## Równania różniczkowe zwyczajne – ćwiczenia 1

20 lutego 2013

1. Rozwiązać, używając metody rozdzielania zmiennych, równanie  $\dot{x} = ax$ .
2. Spadochroniarz o masie  $m$  (ze spadochronem włącznie) opada z pewnej wysokości  $x_0$  z początkową prędkością 0. Przyspieszenie ziemskie to  $g$ . Działa na niego również siła oporu powietrza o współczynniku  $\alpha$ . Można rozważać prostszy przypadek, "przy dużym spadochronie", gdzie siła oporu jest proporcjonalna do prędkości i "przy małym spadochronie" – do kwadratu prędkości.  
Wypisać równanie i rozwiązać je.
3. Co musi spełniać  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , aby funkcja  $e^{\lambda x}$  była rozwiązaniem równania  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ ?  
Pokazać, że jeśli otrzymany wielomian ma  $n$  różnych pierwiastków zespolonych, to kombinacje liniowe funkcji  $e^{\lambda_i x}$  są również rozwiązaniami tego równania różniczkowego.
4. Korzystając z wyników zadania 3 znaleźć rozwiązania
  - a)  $x'' - 5x' + 6x = 0$ ,
  - b)  $x''' + 2x'' - x' - 2x = 0$ .
5. Rozwiązać, używając metody rozdzielania zmiennych, równanie  $xy + (x + 1)\frac{dy}{dx} = 0$ .
6. Masa rakiety z paliwem wynosi  $M$ , a bez paliwa  $m$ . Prędkość wypływu paliwa to  $c$ . Prędkość początkowa rakiety 0. Znaleźć prędkość rakiety po spaleniu paliwa – zaniedbujemy opory i przyciąganie ziemskie.
7. Rozwiązać równanie różniczkowe na wzrost populacji w przypadku ograniczonej pojemności środowiska  $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$  (tzw. równanie logistyczne).