# Mikroekonomia

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
**e-mail:** agnese@mimuw.edu.pl

Niniejsze opracowanie jest skryptem do wykładu z mikroekonomii dla studentów matematyki prowadzonego przeze mnie na wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Wykład ten jest przeznaczony dla studentów matematyki i dlatego nie ma i nie może mieć odpowiednika na naszych uczelniach i wydziałach ekonomicznych: nie zakłada, że studenci mają jakąkolwiek wiedzę na temat ekonomii, a równocześnie wprowadza modele wymagające "obycia" matematycznego.

Dla studentów ekonomii, jeśli nie zanudzą ich definicje i objaśnienia dobrze znanych pojęć, skrypt może przydać się do wykładu z Mikroekonomii 3.

**Literatura**

Wykład oparty jest w większości na:

A. Mass-Colell, M. Whinston, J. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press,1995, oraz

H. R. Varian, *Microeconomic Analysis*, W. W. Norton & Company, 1992.

Notacja skryptu jest w większości zgodna z użytą w podręczniku Mass-Colella, Whinstona i Greena.

Dla tych, którzy chcą poczytać coś łatwego, przyjemnego i po polsku, poznać intuicje:

H. R. Varian, *Mikroekonomia: kurs średni. Ujęcie nowoczesne*, Wydawnictwa Naukowe PWN, 1995, (1997 drugie wyd.)

Zdecydowanie odradzam Mikroekonomię Begga.

## 1. Co to jest mikroekonomia?

Zwykłemu "przeciętnemu śmiertelnikowi" słowo "ekonomia" kojarzy się przeważnie na jeden z czterech sposobów jako:

1) sposób na zarobienie dużych pieniędzy (oczywiście bez ponoszenia ryzyka);

2) kolumny cyferek, które dodają księgowi, aby na końcu uzyskać "winien = ma";

3) zbiór magicznych reguł określający, jak w reakcji na określone działania polityków zachowa się gospodarka (cokolwiek by to słowo znaczyło), a co za tym idzie: czy będę miał pracę, ile zapłacę za benzynę...

4) wielkie oszustwo, którym politycy usprawiedliwiają swoje błędy.

Żaden z tych opisów nie tylko nie obejmuje mikroekonomii, ale nawet nie ma z nią niepustego przecięcia: (1) to finanse, (a raczej fikcja o finansach, jako że podstawową prawdą w ekonomii jest słynne "*no free lunch*", czyli "nie ma czegoś takiego, jak obiadek za darmo"); (2) to rachunkowość, a (3) i (4) to makroekonomia.

Z punktu widzenia matematyka to właśnie mikroekonomia jest najciekawszą dziedziną ekonomii: jest najbardziej zmatematyzowana (oczywiście poza rachunkowością, ale trudno matematykę w rachunkowości uznać za ciekawą).

Mikroekonomia nie odpowiada na pytania "jak zachowa się gospodarka" ani "co zrobić, żeby zarobić".

Opisuje zachowanie jednostek: ludzi lub firm (najczęściej nazywanych konsumentami i producentami, choć będziemy też używać takich określeń jak agent czy gracz, w rozumieniu znacznie szerszym niż potoczne) i określa, jak skumulowane (w ekonomii używamy terminu "zagregowane" do określenia wielkości skumulowanych, łącznych; i czasownika "agregować") efekty indywidualnych decyzji prowadzą do równowagi.

Tak więc całą mikroekonomię w uproszczeniu można sprowadzić do dwóch zagadnień: teorii wyboru i równowagi.

Naszą analizę rozpoczniemy od teorii wyboru.

## 2. Ogólna teoria wyboru

W ogólnej teorii wyboru mamy jednego *podejmującego decyzje* (zamiennie używa się pochodzącego z angielskiego terminu *agent*). Wybiera on ze *zbioru możliwości*, przy czym w konkretnej sytuacji musi ograniczyć się jedynie do aktualnie dostępnego *zbioru budżetowego*.

Zbiór możliwości $\mathbb{X}$ w najbardziej ogólnej postaci zawiera wszystkie fizycznie osiągalne wektory o współrzędnych oznaczających wszystko, co może mieć wartość dla podejmującego decyzję: konsumpcja, wolny czas, pieniądze, udział w loteriach, zysk, oszczędności na przyszłość itd. Można to ciągnąć w nieskończoność. Zazwyczaj jednak ograniczymy się do skończenie wymiarowego zbioru możliwości i to niewielkiego wymiaru, czyli przyjmiemy, że w konkretnym zadaniu decyzyjnym bierzemy pod uwagę tylko niektóre czynniki, redukując złożoność nawet do dwóch wymiarów – interesujące nas w danej analizie dobro i pieniądze na zakup innych.

Rodzina zbiorów budżetowych $\mathcal{B}$ to rodzina niepustych podzbiorów zbioru możliwości zawierających punkty osiągalne przy pewnych ograniczeniach (np. chociaż doba ma 24 godziny, to mogę pracować nie więcej niż 12; mam 100 złotych i przy danych cenach nie mogę kupić towarów za więcej).

**Przykład 2.1.** Walrasowskie *albo* konkurencyjne *albo* rynkowe zbiory budżetowe $B_{\mathbf{p},m}$

*Najczęściej w wyborze konsumenta mamy do czynienia z sytuacją, gdy na rynku jest $n$ dóbr ($\mathbb{X} = \mathbb{R}^n_+$, czyli $[0, +\infty)^n$), dany jest wektor cen rynkowych $\mathbf{p}$, a my mamy do dyspozycji określony dochód $m$ do wydania. Wówczas zbiór budżetowy ma postać $B_{\mathbf{p},m} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{p}^T x \leq m\}$.*

Z każdego zbioru budżetowego agent wybiera przynajmniej jeden punkt... Jeżeli dodamy "tak, aby wybrane punkty były dla niego najlepsze", to przejdziemy do jednego z dwóch ujęć teorii wyboru: *podejścia maksymalizacji preferencji.* Jeżeli natomiast postawimy kropkę, a interesować nas będzie jedynie funkcja (przeważnie będzie to odwzorowanie wielowartościowe) przyporządkowująca zbiorowi budżetowemu wybór – nieważne skąd się wziął – to będzie to *podejście struktury wyboru* (w którym mieszczą się znane na pewno ze słyszenia terminy *popyt* i *podaż*).

**2.1. Podejście maksymalizacji preferencji / użyteczności.** Teoria preferencji to matematyczne sformalizowanie zdania "agent wybiera najlepszą z dostępnych możliwości".

**Definicja 2.2.** *Relację dwuargumentową $\succeq$ określoną na zbiorze możliwości $\mathbb{X}$ będziemy nazywać* relacją preferencji *(albo relacją* słabej preferencji*).*

Relację ścisłej preferencji $\succ$ *definiujemy przy pomocy relacji preferencji wzorem* $x \succ y \iff [x \succeq y \wedge \sim (y \succeq x)]$.

Relację obojętności $\sim$ *definiujemy wzorem* $x \sim y \iff [x \succeq y \wedge y \succeq x]$.

Zamiast $(x, y) \in \succeq$, będziemy pisać $x \succeq y$, co czytamy jako *x jest preferowane przed y*, *x jest niegorsze niż y* albo *x jest przynajmniej tak samo dobre jak y*. Analogicznie piszemy $x \succ y$ i czytamy *x jest ściśle preferowane przed y*, *x jest lepszy niż y* albo *agent woli x niż y*. Podobnie dla relacji obojętności (niektórzy ekonomiści używają karkołomnej kalki z języka angielskiego *indyferencja*) piszemy $x \sim y$ i czytamy *x jest tak samo dobry jak y* albo *agentowi jest wszystko jedno, czy wybrać x czy y* (jeżeli usłyszymy *agent jest indyferentny pomiędzy x* a $y$, to mówiącemu właśnie o to chodzi).

Agent musi wybrać element zbioru budżetowego $B \in \mathcal{B}$, który maksymalizuje relację preferencji: optymalnym wyborem są takie $x \in B$, że dla każdego $y \in B$ zachodzi $x \succeq y$.

Kluczowym założeniem w teorii ekonomii jest to, że *podejmujący decyjzę jest racjonalny*. Każdy chętnie zgodzi się z tym założeniem, chociaż nie każdy potrafiłby je formalnie zdefiniować. Warunki na racjonalność mogą być różne, ale dwa z nich są bezdyskusyjne:
(1) jeżeli mam do wyboru dwie możliwości, to potrafię je porównać (tzn. powiedzieć, która z nich jest lepsza albo że obie są tak samo dobre);
(2) jeśli mam trzy możliwości, z których pierwsza jest niegorsza niż druga, a druga niegorsza niż trzecia, to pierwsza powinna być niegorsza niż trzecia.

Matematycznie te dwa warunki mają oczywistą postać:

**Definicja 2.3.** *Relacja* $\succeq$ *jest* racjonalna, *jeśli jest ona zupełna (spójna) i przechodnia.*

Dlaczego racjonalność jest tak istotna?

**Przykład 2.4.** *Skutki braku racjonalności*
*W stołówce studenckiej mamy do wyboru trzy zupy: pomidorową, ogórkową i krupnik* ($\mathbb{X} = \{p, o, k\}$).

*a) Brak zupełności*

*Jaś ma relację preferencji* $\{(o, p), (k, p)\}$. *Nie wie, czy wolałby krupnik, czy ogórkową, czy jest mu to obojętne. Jeśli podejmie jakąś decyzję, może wybrać gorszą możliwość. Jeśli nie dookreśli swoich preferencji, to minie przerwa i Jaś głodny pójdzie na wykład.*

*b) Brak przechodniości*

*Tym razem Jaś ma relację preferencji* $\{(o, p), (p, k), (k, o)\}$. *Kupił już zupę ogórkową. Nie będzie miał nic przeciwko zamianie jej na krupnik, a nawet zapewne byłby skłonny za to zapłacić symboliczny grosik. Potem krupnik zamienia na pomidorową, również za symboliczną dopłatą, a pomidorową na ogórkową... Koło się zamknęło,* *wszystkich transakcji można dokonać ponownie, z czasem uzbiera się z tego spory kapitał. Wystarczy odkryć brak racjonalności Jasia i możemy na nim nieźle zarobić.*

Chociaż założenie racjonalności wydaje się oczywiste, często w rzeczywistych sytuacjach nie jesteśmy racjonalni.

**Przykład 2.5.** *Przykłady braku racjonalności w rzeczywistych sytuacjach*

*a) Brak zupełności wynikający z niewiedzy*

*Nie potrafimy porównać rzeczy, na których mało się znamy albo które wymagają zbyt żmudnych obliczeń. We współczesnej ekonomii pojawia się nawet termin "racjonalna ignorancją", pod którym kryje się to, że gdy zdobycie pełnej wiedzy potrzebnej do podjęcia decyzji jest znacznie bardziej kosztowne (w porównywalnych jednostkach) niż maksymalna korzyść, jaką dzięki tej wiedzy możemy uzyskać w rozwiązaniu naszego zagadnienia wyboru, to lepiej pozostać w tej kwestii ignorantem.*

*Zupełność oznacza, coś zupełnie przeciwnego – dokładnie przestudiowaliśmy wszystkie szczegóły i dokładnie wiemy, jakie każdy z nich ma znaczenie.*

*b) Brak przechodniości wynikający z niedostrzegalnych lub zaniedbywalnych różnic*

*Jeżeli wybieramy farbę w kolorze kremowym i mamy do wyboru 100 odcieni, to różnice pomiędzy sąsiednimi są niezauważalne, natomiast potrafimy rozróżnić najciemniejszy od najjaśniejszego i określić, który z nich bardziej nam się podoba.*

*Podobnie, jeżeli przy zakupie samochodu wybieramy lepszą cenę tego samego modelu, to różnica o jeden grosz jest zaniedbywalna. Gdybyśmy jednak porównali cały szereg ofert różniących się o jeden grosz, te zaniedbywalne różnice mogły by zsumować się na już niezaniebdywalną różnicę pomiędzy największą a najmniejszą.*

*Przechodniość oznacza, że każdy grosz się liczy i nie ma rzeczy nierozróżnialych, jeśli mają różną wartość.*

*c) Pozorny brak racjonalności wynikający ze zmiany upodobań*

*Jaś z poprzedniego przykładu w poniedziałek miał apetyt na pomidorową i zdecydowanie wolał ją od innych, a we wtorek na ogórkową.*

*Racjonalność nie oznacza, że nasze gusty są niezmienne, ale że w momencie podejmowania decyzji bierzemy pod uwagę to, że nasze gusty mogą się zmienić.*

**Stwierdzenie 2.6.** *Jeżeli relacja $\succeq$ jest racjonalna, to relacja $\sim$ jest relacją równoważności i $\succeq$ jest liniowym porządkiem na $(\mathbb{X}/\sim)$ – zbiorze klas abstrakcji $\sim$.*

Dowód powyższego stwierdzenia jako zupełnie elementarny pozostawiamy czytelnikowi.

Od tej pory będziemy zawsze zakładać, że podejmujący decyzję jest racjonalny.

**Definicja 2.7.** *Klasy abstrakcji relacji obojętności nazywamy* krzywymi obojętności.

Jeżeli jest to możliwe, wygodnie byłoby przyporządkować elementom zbioru wyboru ich wartość dla podejmującego decyzję. Wówczas zamiast porównywać pary punktów przy pomocy relacji preferencji, wystarczyłoby znaleźć punkty, w których przyjmowane jest maksimum wartości funkcji użyteczności.

**Definicja 2.8.** *Funkcję $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją użyteczności odzwierciedlającą relację preferencji $\succeq$, jeśli dla każdego $x, y \in \mathbb{X}$ zachodzi tożsamość $x \succeq y \iff u(x) \geq u(y)$.*

Jeżeli $u$ jest funkcją użyteczności odzwierciedlającą $\succeq$, to optymalny wybór ze zbioru $B$ to zbiór $\operatorname{Argmax}_{x \in B} u(x)$ (zbiór elementów zbioru $B$ na których jest przyjmowane maksimum funkcji $u$).

Należy się spodziewać, że jeśli relacja preferencji pozwala na istnienie funkcji użyteczności, to jest racjonalna.

**Stwierdzenie 2.9.** *Jeżeli istnieje funkcja użyteczności odzwierciedlająca relację preferencji $\succeq$, to $\succeq$ jest racjonalna.*

Dowód powyższego stwierdzenia jako zupełnie elementarny pozostawiamy czytelnikowi.

Okazuje się, że racjonalność jest warunkiem koniecznym, ale nie dostatecznym istnienia funkcji użyteczności.

**Twierdzenie 2.10.** *Niech relacja $\succeq$ będzie racjonalna.*

*Wówczas istnieje funkcja użyteczności $u$ odzwierciedlająca $\succeq$ wtedy i tylko wtedy gdy w zbiorze $(\mathbb{X}/\sim)$ (zbiorze klas abstrakcji relacji obojętności) uporządkowanym przez relację $\succeq$ istnieje zbiór $A$ co najwyżej przeliczalny i gęsty względem tej relacji.*

**Dowód**

($\Rightarrow$) Wynika, z tego, że przeliczalny podzbiór gęsty względem relacji $\geq$ zawsze istnieje w podzbiorach liczb rzeczywistych. Niech $B$ – przeliczalny podzbiór gęsty zbioru $u(\mathbb{X})$. Wówczas $A = \{u^{-1}(b) : b \in B\}$ jest przeliczalny i jest gęsty w zbiorze $(\mathbb{X}/\sim)$ względem $\succeq$ – jeśli weźmiemy $x \succ y \in (\mathbb{X}/\sim)$, to z definicji $u$ $u(x) > u(y)$, a więc z gęstości $B$ istnieje $b \in B$, takie że $u(x) \geq b \geq u(y)$, czyli $x \succeq u^{-1}(b) \succeq y$. Ponieważ $u^{-1}(b) \in A$, mamy gęstość tego zbioru w $(\mathbb{X}/\sim)$ względem $\succeq$.

($\Leftarrow$) Niech $A$ będzie takim zbiorem co najwyżej przeliczalny zawierającym elementy największy i najmniejszy $\mathbb{X}$ względem relacji Ponieważ zbiór $A$ jest co najwyżej przeliczalny, ustawiamy jego elementy w ciąg $\{a_n\}$. Definiujemy wartości funkcji $u$ na tym zbiorze rekurencyjnie w następujący sposób.

$u(a_0) = 0$,

$$u(a_n) = \begin{cases} \min_{k<n} u(a_k) - \frac{1}{2^k} & \text{jeśli } \forall k < n \; a_k \succ a_n, \\ \max_{k<n} u(a_k) + \frac{1}{2^k} & \text{jeśli } \forall k < n \; a_n \succ a_k, \\ \frac{\min_{k<n} u(a_k) + \max_{k<n} u(a_k)}{2} & \text{w przec. przyp.} \end{cases}$$

Jak widać, na zbiorze $A$ funkcja $u$ będzie dobrze odzwierciedlać relację $\succeq$.

Na pozostałych elementach $a \in (\mathbb{X}/\sim) \setminus A$ definiujemy $u(a)$ jako $\frac{\inf_{a_k \succeq a, a_k \in A} u(a_k) + \sup_{a \succeq a_k, a_k \in A} u(a_k)}{2}$. Widać, że ta definicja jest poprawna i łatwo pokazać, że tak zdefiniowana funkcja $u$ odzwierciedla $\succeq$, czyli $x \succeq y \iff u(x) \geq u(y)$.

Wystarczy w tym celu pokazać, że

1. $x \succ y \Rightarrow u(x) > u(y)$ i
2. $x \sim y \Rightarrow u(x) = u(y)$,

ponieważ 1 i 2 daje nam implikację $\Rightarrow$, a $x \succ y$ to, ze spójności $\succeq$ negacja $y \succeq x$, co daje nam dowód nie wprost implikacji $\Leftarrow$ (z dokładnością do przemianowania zmiennych).

2. wynika bezpośrednio z definicji $u$, a przy dowodzie 1. korzystamy z gęstości $A$. Ponieważ $x \succ y$, więc istnieje $a \in A$, że $x \succeq a \succeq y$. Stąd mamy $u(x) \geq u(a) \geq u(y)$.

Co więcej, co najmniej jedna z tych relacji preferencji musi być ścisła. Niech zatem $x \succ a$. Z definicji $u(x)$ wynika, że $u(x) \geq \sup_{x \succeq a_k, a_k \in A} u(a_k) \geq u(a)$, przy czym w pierwszej nierówności równość może nastąpić tylko wtedy, gdy oba zbiory są nieskończone, a supremum i infinum nie jest osiągane na żadnym z elementów $A$, natomiast w drugiej tylko wtedy, gdy $\sup_{x \succeq a_k, a_k \in A} u(a_k) = u(a)$. Tak więc co najmniej jedna z tych nierówności jest zawsze ostra, a stąd $u(x) > u(y)$.

■

Założenie twierdzenia o istnieniu funkcji użyteczności wydaje się bardzo słabe.

Czy można więc zaryzykować stwierdzenie, że w praktycznych sytuacjach zawsze istnieje funkcja użyteczności, natomiast kontrprzykład jest mało zrozumiałą dla niematematyka teoretyczną konstrukcją?

Nic bardziej mylnego: dla porządku leksykograficznego już w $\mathbb{R}^2$ (zdefiniowanego przez $x \succeq y \Leftrightarrow (x_1 > y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \geq y_2)))$ nie istnieje funkcja użyteczności. Porządek leksykograficzny, wymyślony, zgodnie z nazwą, do porządkowania zawartości słowników, nie jest też zupełnie abstrakcyjny w ekonomii:

**Przykład 2.11.** *Nieistnienie funkcji użyteczności*

*Radny Kowalski mieszkający na ulicy Polnej ma zdecydować, jak długi odcinek ulicy Polnej i jaki ulicy Leśnej (na której prawie wcale nie bywa) ma być asfaltowany. Jego relacja preferencji jest oczywista: im większy odcinek ulicy Polnej zostanie pokryty asfaltem, tym lepiej. Jeśli natomiast porównujemy możliwości w których pokryty asfaltem kawałek ulicy Polnej jest taki sam, to im większy kawałek ulicy Leśnej zostanie pokryty, tym lepiej. Preferencje radnego to porządek leksykograficzny, a więc nie istnieje funkcja użyteczności, która je odzwierciedla.*

Mamy twierdzenie o istnieniu funkcji użyteczności. Jak jest z jednoznacznością?

Nie tylko nie mamy jednoznaczności, ale nawet fakt zupełnie przeciwny – istnienie nieskończenie wielu funkcji użyteczności odzwierciedlających tę samą relację preferencji.

**Stwierdzenie 2.12.** *(o monotonicznej transformacji użyteczności)*

*Jeżeli $u$ jest funkcją użyteczności odzwierciedlającą relację preferencji $\succeq$, to dla dowolnej funkcji $f : u(\mathbb{X}) \to \mathbb{R}$ ściśle rosnącej, funkcja $f \circ u$ jest również funkcją użyteczności odzwierciedlającą $\succeq$.*

Dowód powyższego stwierdzenia jako zupełnie elementarny pozostawiamy czytelnikowi.

Skoro wybór konkretnej funkcji użyteczności nie ma wpływu na wybór agenta, więc zawsze możemy przyjąć tę funkcję, która ułatwia nam obliczenia.

**2.2. Podejście struktury wyboru.** Jedną z podstawowych wad podejścia maksymalizacji preferencji lub użyteczności jest to, że (zwłaszcza przy podejmowaniu decyzji przez konsumenta) nikt nigdy nie widział relacji preferencji, a cóż dopiero funkcji użyteczności. Sam agent przeważnie ich sobie nie uświadamia. To, co wiemy, to jakie decyzje podjęliśmy w konkretnych sytuacjach, czyli znamy przynajmniej jeden element wartości zasady wyboru dla konkretnych zbiorów budżetowych (jak niedługo zobaczymy, w ekonomii odwzorowania, które to odzwierciedlają przeważnie będą nosić nazwę podaży lub popytu).

Przypomnijmy, że mamy zbiór możliwości $\mathbb{X}$ i rodzinę zbiorów budżetowych $\mathcal{B}$.

**Definicja 2.13.** Zasadą wyboru *nazywamy funkcję przyporządkowującą każdemu zbiorowi budżetowemu jego niepusty podzbiór. Jeżeli $\mathcal{C}$ jest zasadą wyboru, to parę $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ nazywamy strukturą wyboru.*

**Przykład 2.14.** *Walrasowskie zbiory budżetowe z*

$$C(B_{\mathbf{p},m}) = \begin{cases} \left\{\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)\right\} & \textit{jeśli } p_2 > p_1, \\ \left\{\left(0, \frac{m}{p_2}\right)\right\} & \textit{jeśli } p_2 < p_1, \\ \{(x_1, x_2) : p_1x_1 + p_2x_2 = m\} & \textit{w przec. przyp.} \end{cases}$$

Jeżeli dla pewnego zbioru budżetowego $B$ zbiór $\mathcal{C}(B) = \{x\}$, to ten $x$ jest jedynym możliwym wyborem podejmującego decyzje. Jeżeli natomiast $\mathcal{C}(B)$ jest więcej niż jednoelementowy, jak to może zdarzyć się w naszym przykładzie, to jego element jest jedynie *akceptowalną możliwością*, czyli może, ale nie musi być wybrany.

Pojęcie racjonalności w podejściu preferencji zastępuje tu tzw. słaby aksjomat ujawnionych preferencji: jeśli w pewnej sytuacji wybraliśmy $x$, kiedy dostępny był

$y$, to w dowolnej sytuacji, w której wybralibyśmy $y$, podczas gdy $x$ jest dostępny, wybralibyśmy również $x$.

**Definicja 2.15.** Słaby aksjomat ujawnionych preferencji:

*Jeśli istnieje taki zbiór $B \in \mathcal{B}$, że $x, y \in B$ i $x \in \mathcal{C}(B)$, to dla każdego $B' \in \mathcal{B}$ takiego, że $x, y \in B'$ i $y \in \mathcal{C}(B')$ zachodzi również $x \in \mathcal{C}(B')$.*

## 2.3. Równoważność podejść.

**Definicja 2.16.** *Dla struktury wyboru $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ relację $\succeq^*$nazywamy* relacją ujawnionych preferencji, *jeśli $x \succeq^* y \iff \exists B \in \mathcal{B}$ takie że $x, y \in B$ i $x \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$.*

**Definicja 2.17.** Zasadą wyboru generowaną przez relację preferencji $\succeq$ *nazywamy odwzorowanie zdefiniowane wzorem $\mathcal{C}_{\succeq}(B) = \{x \in B : \forall y \in B\ x \succeq y\}$.*

**Stwierdzenie 2.18.** *Jeżeli relacja $\succeq$ jest racjonalna, to struktura wyboru przez nią generowana spełnia słaby aksjomat ujawnionych preferencji.*

Dowód powyższego stwierdzenia jako zupełnie elementarny pozostawiamy czytelnikowi.

**Definicja 2.19.** *Racjonalna relacja $\succeq$* racjonalizuje zasadę wyboru $\mathcal{C}$ na rodzinie $\mathcal{B}$, *jeśli dla każdego zbioru budżetowego $B \in \mathcal{B}$ mamy $\mathcal{C}(B) = \mathcal{C}_{\succeq}(B)$.*

Inaczej można powiedzieć: relacja $\succeq$ racjonalizuje zasadę wyboru $\mathcal{C}$ na rodzinie $\mathcal{B}$, jeśli $\succeq$ generuje strukturę wyboru $\mathcal{C}$ na $\mathcal{B}$.

**Stwierdzenie 2.20.** *Jeżeli struktura wyboru $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ spełnia słaby aksjomat ujawnionych preferencji i rodzina zbiorów budżetowych zawiera wszystkie podzbiory $\mathbb{X}$, które mają co najwyżej trzy elementy, to istnieje racjonalna relacja preferencji racjonalizująca tę strukturę wyboru i jest ona jednoznaczna: jest to relacja ujawnionej preferencji.*

Nieco żmudny dowód powyższego stwierdzenia pozostawiamy czytelnikowi.

## 3. Relacje preferencji ponownie

Oprócz wymienionej poprzednio racjonalności, relacje preferencji mogą jeszcze inne własności, przydatne w późniejszych rozważaniach. Odtąd zakładamy, że relacja preferencji jest racjonalna.

Zdefiniujemy je poniżej:

**Definicja 3.1.** *Relację preferancji $\succeq$ nazywamy:*

*a)* ciągłą, *jeśli dla każdego $x \in \mathbb{X}$ zbiory $\{y \in \mathbb{X} : x \succeq y\}$ i $\{y \in \mathbb{X} : y \succeq x\}$ są domknięte;*

*b)* monotoniczną, *jeśli $x \geq y \Longrightarrow x \succeq y$;*

*c)* ściśle monotoniczną, *jeśli $(x \geq y \wedge x \neq y) \Longrightarrow x \succ y$;*

*d)* lokalnie nienasyconą, *jeśli w dowolnym otoczeniu punktu $x$ istnieje $y$ lepszy od $x$ (formalnie $\forall x \in \mathbb{X}, \epsilon > 0\ \exists y \in \mathbb{X}$ taki że $\|y - x\| < \epsilon$ i $y \succ x$);*

*e)* wypukłą, *jeśli $\forall (x, y, z \in \mathbb{X}, 0 < t < 1)\ (x \succeq z \wedge y \succeq z) \Longrightarrow tx + (1-t)y \succeq z$ (dla każdego $z$ zbiór punktów niegorszych od $z$ jest wypukły);*

*f)* ściśle wypukłą, *jeśli $\forall (x, y, z \in \mathbb{X}, 0 < t < 1)\ (x \succeq z \wedge y \succeq z \wedge x \neq y) \Longrightarrow tx + (1-t)y \succ z$.*

Monotoniczność oznacza, że mamy do czynienia z dobrami a nie "złem", to znaczy że są one pożądane, ścisła monotoniczność oznacza ponadto, że nie występuje punkt nasycenia. Lokalne nienasycenie gwarantuje, że krzywe obojętności nie mogą być "grube".

**Stwierdzenie 3.2.** *a) Jeśli istnieje ciągła funkcja użyteczności odzwierciedlająca $\succeq$, to relacja $\succeq$ jest ciągła.*

*b) Jeśli istnieje, wklęsła (ściśle wklęsła) funkcja użyteczności odzwierciedlająca $\succeq$, to relacja $\succeq$ jest wypukła (ściśle wypukła).*

*c) Jeśli istnieje monotoniczna (ściśle monotoniczna) funkcja użyteczności odzwierciedlająca $\succeq$, to relacja $\succeq$ jest monotoniczna (ściśle monotoniczna).*

*d) Każda funkcja odzwierciedlająca monotonicze (ściśle monotonicze) preferencje jest ściśle monotoniczna.*

Dowód powyższego stwierdzenia jako zupełnie elementarny pozostawiamy czytelnikowi.

Zazwyczaj stosowane w ekonomii (głównie w zagadnieniu optymalizacji konsumenta) relacje preferencji są ciągłe, ściśle monotoniczne i ściśle wypukłe, a odpowiadające im funkcje użyteczności gładkie.

Typowa *mapa obojętności* (rysunek przedstawiający różne krzywe obojątności na płaszczyźnie) wygląda więc tak:

**Rysunek 3.1**

**Przykład 3.3.** *Przykłady relacji preferencji i funkcji użyteczności w* $\mathbb{R}^2_+$*:*

*a) doskonałe substytuty – z dokładnością do przeskalowania są swoimi zamiennikami (np. banknoty o różnych nominałach; takie same gwoździe z dwóch różnych sklepów):* $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow ax_1 + bx_2 \geq ay_1 + by_2$*;*

***Rysunek 3.2***

*b) dobra doskonale komplementarne – zużywane zawsze w równych proporcjach, nadmiar się marnuje (np. prawe i lewe buty, czy składniki kleju dwuskładnikowego)* $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min(ax_1, bx_2) \geq \min(ay_1, by_2)$;

***Rysunek 3.3***

*c) funkcja użyteczności Cobba-Douglasa* $u(x, y) = x^a y^b$.

***Rysunek 3.4***

## 4. NARZĘDZIA

**4.1. Zagadnienia wyboru.** Aby analizować zagadnienia teorii wyboru, potrzebujemy trochę teorii optymalizacji. Niektóre z poniższych faktów są zapewne państwu znane.

Zaczniemy od warunku koniecznego optymalności (tzw. warunku pierwszego rzędu).

**Twierdzenie 4.1.** *(mnożniki Lagrange'a)*

*Niech* $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ *i niech funkcje* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *i* $g_i : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *dla* $i = 1, \dots, m$ *będą różniczkowalne. Jeżeli w punkcie* $x^* \in \mathbb{X}$*, jest przyjmowane maximum (minimum)* $f$ *na zbiorze* $\{x : g_i(x) = 0 \text{ dla } i = 1, \dots, m\}$ *i gradienty funkcji* $g_i$ *są liniowo niezależne w* $x^*$*, to istnieje taki wektor* $\lambda \in \mathbb{R}^m$*, że* $\nabla f(x^*) - \lambda^T \nabla g(x^*) = 0$.

**Definicja 4.2.** *Funkcję* $\mathcal{L}(\lambda, x) = f(x) - \lambda^T g(x)$ *nazywamy* lagrangianem*, a wektor* $\lambda$ *nazywamy* mnożnikami Lagrange'a.

Twierdzenie można sformułować następująco: punkt optymalny dla optymalizacji z ograniczeniami równościowymi wraz wektorem mnożników musi być punktem krytycznym lagrangianu (zerowanie pochodnej po $\lambda$ to równości definiujące zbiór dopuszczalny).

**Uwaga:** Dla uproszczenia zapisu wyników maksymalizacji (minimalizacji) funkcji $f$ po zbiorze $\Gamma$, wprowadzimy symbole $\operatorname{Argmax}_{x\in\Gamma} f(x)$ ($\operatorname{Argmin}_{x\in\Gamma} f(x)$) na zbiór tych punktów, w których maksimum (minimum) jest przyjmowane.

Ponadto, jeżeli maksymalizujemy funkcję po pewnym zbiorze i ten zbiór okaże się pusty, wówczas za maksimum przyjmujemy $-\infty$ (analogicznie za minimum $+\infty$).

**Przykład 4.3.** *Znajdowanie maksimum ściśle monotonicznej, ściśle wklęsłej i różniczkowalnej funkcji użyteczności* $u$ *na Walrasowskim zbiorze budżetowym* $\{x \in \mathbb{R}^2_+ : \mathbf{p}^T x \leq m\}$ *(gdzie* $p_i, m > 0$*) przy pomocy mnożników Lagrange'a.*

W niniejszym przykładzie rozwiązujemy zagadnienie, z jakim mamy do czynienia zazwyczaj przy wyborze konsumenta: funkcja użyteczności jest ściśle monotoniczna, i wklęsła, a zbiory budżetowe są walrasowskie. Ponieważ $u$ jest monotoniczna, więc $\max_{\{x:p_1x_1+p_2x_2\leq m\}} u(x) = \max_{\{x:p_1x_1+p_2x_2=m\}} u(x)$. Ponieważ ponadto $u$ jest ściśle monotoniczna, także $\operatorname{Argmax}_{\{x:p_1x_1+p_2x_2\leq m\}} u(x) = \operatorname{Argmax}_{\{x:p_1x_1+p_2x_2=m\}} u(x)$, co sprowadza optymalizację z ograniczeniem nierównościowym do optymalizacji z ograniczeniem równościowym.

Lagrangian zagadnienia ma postać $\mathcal{L}(\lambda, x) = u(x) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$, a więc warunki konieczne na to, aby w punkcie $x$ o obu współrzędnych dodatnich było przyjmowane maksimum to:

$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0,$
$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0,$
$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m.$

Przeanalizujmy dwa pierwsze równania:
$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = \lambda p_1,$
$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = \lambda p_2.$

Ponieważ $u$ jest ściśle monotoniczna, w $x$ nie może być przyjmowane maksimum globalne $u$, a ponieważ funkcja jest ściśle wklęsła, pochodna może się zerować tylko w maksimum globalnym, stąd wiemy, że $\lambda \neq 0$. Możemy więc podzielić równania przez siebie stronami. Otrzymamy $\frac{\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}} = \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Jest to warunek konieczny maksymalizacji w naszym przypadku. Ma on interpretacje zarówno ekonomiczną jak i graficzną. Obie będą bardziej oczywiste, jeżeli powyższe równanie pomnożymy przez $-1$:

$-\frac{\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}} = -\frac{p_1}{p_2}.$

Prawa strona to oczywiście nachylenie ograniczenia budżetowego, natomiast lewa to nachylenie krzywej obojętności przechodzącej przez punkt $x$ (co łatwo wynika z twierdzenia o funkcji uwikłanej), a więc to, co otrzymaliśmy, to warunek konieczny styczności: równość nachyleń w punkcie styczności.

**Rysunek 4.1**

Interpretacja ekonomiczna brzmi: krańcowa stopa substytucji równa się, co do modułu, stosunkowi cen.

**Definicja 4.4.** Krańcową stopą substytucji *pomiędzy dobrami* 1 *i* 2 *w punkcie* $x$ *nazywamy współczynnik kierunkowy krzywej obojętności w punkcie* $x$*. Oznaczamy ją skrótem* $MRS(x_1, x_2)$ *(od angielskiego* marginal rate of substitution*).*

Z twierdzenia o funkcji uwikłanej mamy więc $MRS(x_1, x_2) = -\frac{\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}}$.

Uwaga: W niektórych podręcznikach krańcowa stopa substytucji jest definiowana bez minusa, a czasem nawet zdarzają się niekonsekwencje: jest definiowana jako nachylenie, a więc z minusem, a potem minus ginie w stwierdzeniu "krańcowa stopa substytucji równa się stosunkowi cen" i tym podobnych.

Uwaga: Interpetacja łopatologiczna słowa "krańcowy", czyli pochodnych w ekonomii, jako skutku zmiany o jednostkę. W przypadku teorii wyboru konsumenta ma to niewielki sens, natomiast w przypadku wyboru producenta, przy bardzo dużych nakładach produkcji może być w miarę przyzwoitym przybliżeniem.

A więc ekonomista może zdefiniować krańcową stopę substytucji słowami: "o ile musi zmienić się konsumpcja dobra 2 jeśli konsumpcja dobra 1 zwiększyła się o jednostkę, abyśmy pozostali na tej samej krzywej obojętności".

Warunek dostateczny optymalności uogólnia warunek dostateczny dla przypadku optymalizacji bez ograniczeń: jeśli w dopuszczalnym $x^*$ spełniony jest warunek pierwszego rzędu i macierz drugiej pochodnej jest dodatnio określona w dowolnym kierunku dopuszczalnym (tzn. $h^T \cdot D^2 f(x^*) \cdot h \geq 0$ dla $h$ takich, że $\nabla g(x^*) \cdot h = 0$), to w punkcie $x^*$ jest przyjmowane minimum, jeśli natomiast ujemnie określona – maksimum. Ponieważ jednak badanie określoności macierzy dla wektorów z pewnej podprzestrzeni nie jest trywialne, sformułujemy ten warunek równoważnie.

**Twierdzenie 4.5.** *Niech $m = 1$. Jeśli w dopuszczalnym punkcie $x^*$ spełnione są warunki pierwszego rzędu dla pewnego mnożnika $\lambda^*$ i jeśli dla $k \geq 3$ minory główne $\Delta_k$ macierzy $D^2\mathcal{L}(\lambda^*, x^*)$ spełniają warunek $\operatorname{sign} \Delta_k = -1$, to w $x^*$ jest przyjmowane minimum, jeśli natomiast $\operatorname{sign} \Delta_k = (-1)^{k+1}$, to maksimum.*

**Twierdzenie 4.6.** *Jeśli funkcja $f$ jest wklęsła, $g$ liniowa i $x^*$ dopuszczalny spełnia warunek pierwszego rzędu, to w $x^*$ jest przyjmowane maksimum, a jeśli $f$ jest wypukła, to minimum.*

W przypadku ograniczeń nierównościowych mamy podobne warunki pierwszego rzędu.

**Twierdzenie 4.7.** *(mnożniki Kuhna-Tuckera)*
*Niech $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ i niech funkcje $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ i $g_i, h_i : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne. Jeżeli w punkcie $x^* \in \mathbb{X}$, jest przyjmowane maximum $f$ na zbiorze $\{x : g_i(x) \leq 0$ dla $i = 1, \ldots, m$; $h_i(x) = 0$ dla $i = 1, \ldots, k\}$ i gradienty w $x^*$ funkcji $h_i$ oraz tych z funkcji $g_i$, dla których $g_i(x^*) = 0$, są liniowo niezależne, to istnieją takie wektory $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, $\mu \in \mathbb{R}^k$ że $\nabla f(x^*) - \lambda^T \nabla g(x^*) - \mu^T \nabla h(x^*) = 0$. Ponadto jeśli $g_i(x^*) \neq 0$, to $\lambda_i = 0$.*

W przypadku ograniczeń nierównościowych wektor mnożników (tzw. mnożników Kuhna-Tuckera) jest nieujemny, istotny jest więc kierunek nierówności. Dlatego, aby uzyskać nieujemny wektor mnożników w przypadku zagadnienia minimalizacji, musimy zapisać ograniczenia w postaci $g_i(x) \geq 0$. Musimy na to też zwrócić uwagę przy warunkach drugiego rzędu.

**Twierdzenie 4.8.** *Jeśli $x^*$ dopuszczalny spełnia warunek pierwszego rzędu, a funkcja $f$ jest wklęsła, funkcje $g_i$ wypukłe, $h_i$ liniowe, to w $x^*$ jest przyjmowane maksimum $f$ na zbiorze $\{x : g_i(x) \leq 0$ dla $i = 1, \ldots, m$; $h_i(x) = 0$ dla $i = 1, \ldots, k\}$, a jeśli $f$ jest wypukła a funkcje $g_i$ wklęsłe, $h_i$ liniowe, to minimum $f$ na zbiorze $\{x : g_i(x) \geq 0$ dla $i = 1, \ldots, m, ;$ $h_i(x) = 0$ dla $i = 1, \ldots, k\}$.*

**Definicja 4.9.** *Funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazywamy* górnie (dolnie) półciągła, *jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ i $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, taka że dla $y$ dla których $\|x - y\| < \delta$ zachodzi własność $f(x) - f(y) > -\epsilon$ (dla dolnej półciągłości $f(x) - f(y) < \epsilon$).*

**Definicja 4.10.** *a) Funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazywamy* quasi-wklęsłą, *jeśli dla każdego $x, y$ i dla każdego $0 < t < 1$ zachodzi warunek $f(tx + (1 - t)y) \geq \min(f(x), f(y))$.*

*b) Funkcja $f$ jest* ściśle quasi-wklęsła, *jeśli dla każdego $x \neq y$ i dla każdego $0 < t < 1$ zachodzi warunek $f(tx + (1 - t)y) > \min(f(x), f(y))$.*

*c) Funkcja $f$ jest* quasi-wypukła (ściśle), *jeśli funkcja $-f$ jest quasi wklęsła (ściśle).*

Każda funkcja wklęsła jest quasi wklęsła, natomiast nie na odwrót. W szczególności funkcja quasi wklęsła nie musi być ciągła, a funkcja wklęsła określona na zbiorze otwartym jest ciągła. Funkcją quasi-wklęsłą może być nawet funkcja ściśle wypukła określona na odcinku, o ile nie ma minimum w jego wnętrzu: na przykład $x^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

**Stwierdzenie 4.11.** *a) Funkcja $f$ jest quasi wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall r$ $\{y : u(y) \geq r\}$ jest wypukły;*

*b) Funkcja $f$ jest ściśle quasi wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall r$ $\{y : u(y) \geq r\}$ jest wypukły i $\forall r \in \mathbb{R}, x \neq y \in \mathbb{X}$ jeśli $u(x) = u(y) = r$, to $\forall t \in (0, 1)$ $u(tx+(1-t)y) > r$.*

Na mocy tego stwierdzenia możemy coś powiedzieć na temat funkcji użyteczności odzwierciedlającej wypukłe preferencje.

**Stwierdzenie 4.12.** *Każda funkcja użyteczności odzwierciedlająca wypukłe preferencje jest quasi wklęsła, a ściśle wypukłe – ściśle quasi wklęsła.*

**Twierdzenie 4.13.** *(istnienie i jednoznaczność maximum)*

*a) Jeżeli funkcja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ jest górnie półciągła a zbiór $G$ niepusty, zwarty, to istnieje punkt realizujący maksimum $f$ na $G$.*

*b) Jeżeli funkcja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ jest ściśle quasi-wklęsła a zbiór $G$ wypukły, to istnieje co najwyżej jeden punkt realizujący maksimum $f$ na $G$.*

*c) Jeżeli funkcja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ jest quasi-wklęsła a zbiór $G$ wypukły, to zbiór punktów realizujących maksimum $f$ na $G$ jest wypukły.*

**Twierdzenie 4.14.** *(twierdzenie o obwiedni dla maksymalizacji z ograniczeniami)*

*a) Niech $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ i niech funkcje $f : \mathbb{X} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{X} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne i takie, że dla każdego $a$, $\max_{g(x,a)=0} f(x, a)$ jest przyjmowane w dokładnie jednym punkcie $x(a)$ dla jednoznacznego wektora mnożników $\lambda$ i tak zdefiniowana*

*funkcja $x$ jest różniczkowalna. Definiujemy $M(a) = \max_{g(x,a)=0} f(x,a)$. Dla funkcji $M$ zachodzi następująca własność:*
$\frac{dM}{da} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}(\lambda,x,a)}{\partial a}\right|_{x=x(a),\lambda=\lambda(a)}$.

*b) Niech $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ i niech funkcje $f : \mathbb{X} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{X} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne i takie, że dla każdego $a$, $\max_{g(x,a)\leq 0} f(x,a)$ jest przyjmowane w dokładnie jednym punkcie $x(a)$ dla jednoznacznego wektora mnożników $\lambda$ i tak zdefiniowane funkcje $x$ i $\lambda$ są różniczkowalne. Definiujemy $M(a) = \max_{g(x,a)\leq 0} f(x,a)$. Dla funkcji $M$ zachodzi następująca własność:*
$\frac{dM}{da} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}(\lambda,x,a)}{\partial a}\right|_{x=x(a),\lambda=\lambda(a)}$.

Dowód powyższego twierdzenia jako zupełnie elementarny pozostawiamy czytelnikowi.

**Wniosek 4.15.** *(twierdzenie o obwiedni dla maksymalizacji bez ograniczeń)*
*Niech $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ i niech funkcja $f : \mathbb{X} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna i taka, że dla każdego $a$, $\max_{x\in\mathbb{X}} f(x,a)$ jest przyjmowane w dokładnie jednym punkcie $x(a)$ i tak zdefiniowana funkcja $x$ jest różniczkowalna. Definiujemy $M(a) = \max_{x\in\mathbb{X}} f(x,a)$. Dla funkcji $M$ zachodzi następująca własność: $\frac{dM}{da} = \left.\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right|_{x=x(a)}$.*

**Definicja 4.16.** *Niech $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ i funkcja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. Funkcję $f$ nazywamy (dodatnio) jednorodną stopnia $r$, jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{X}$, $t > 0$ mamy $f(tx) = t^r f(x)$.*

**4.2. Odwzorowania wielowartościowe.** Ponieważ będziemy rozpatrywać zagadnienie optymalizacyjne w zmieniających się warunkach, zbiory budżetowe, jak również zbiory optymalnych wyborów będą się zmieniać. Jeżeli będzie nas interesować zależność od parametrów, będziemy mieć do czynienia z funkcją. Jednakże wartościami tej funkcji będą przeważnie zbiory. W zasadzie funkcja o wartościach w przestrzeni zbiorów nie jest niczym strasznym, jednak jak np. narysować jej wykres? Jak łatwo stwierdzić, czy jest ona ciągła? Jest na to sposób, bez uciekania się do topologii ogólnej.

Przypomnienie ze wstępu do matematyki: "funkcja jest to *odwzorowanie wielowartościowe* (relacja), które..."

Wrócimy do korzeni, czyli do odwzorowań wielowartościowych.

**Definicja 4.17.** Odwzorowanie wielowartościowe $\Gamma : \mathbb{A} \multimap \mathbb{B}$, *to dowolna funkcja ze zbioru $\mathbb{A}$ w zbiór potęgowy zbioru $\mathbb{B}$ (równoważnie jest to dowolny podzbiór zbioru $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$).*

Wykresem $\Gamma$ *nazywamy zbiór* $\{(a,b) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B} : b \in \Gamma(a)\}$.

Przeciwobrazem górnym zbioru $B \in \mathbb{B}$ *nazywamy zbiór* $\{a \in \mathbb{A} : \Gamma(a) \subset B\}$, *a* przeciwobrazem dolnym zbioru $B \in \mathbb{B}$ *nazywamy zbiór* $\{a \in \mathbb{A} : \Gamma(a) \cap B \neq \emptyset\}$.

*Odwzorowanie* $\Gamma$ *nazywamy* półciągłym z góry *(*z dołu*), jeśli przeciwobrazy górne (dolne) zbiorów otwartych są otwarte.*

*Odwzorowanie* $\Gamma$ *nazywamy* ciągłym, *jeśli jest równocześnie półciągłe z góry i z dołu.*

*Niech* $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ *i odwzorowanie* $\Gamma : \mathbb{X} \multimap \mathbb{R}$. *Odwzorowanie* $\Gamma$ *nazywamy (dodatnio) jednorodnym stopnia* $r$, *jeżeli dla każdego* $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{R}$, $t > 0$ *mamy* $y \in \Gamma(x) \Leftrightarrow t^r y \in \Gamma(tx)$.

Obrazowo mówiąc, półciągłość górna oznacza, że wykres nie ma "dziur", a dolna, że "wąsów".

**Rysunek 4.2**

Łatwo zauważyć, że jeśli odwzorowanie $\Gamma$ jest jednowartościowe (czyli jest "zwykłą" funkcją), to jego dowolna półciągłość jako odwzorowania, implikuje ciągłość jako funkcji.

**Twierdzenie 4.18.** *(twierdzenie o maksimum)*

*Jeżeli funkcja* $f : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, a odwzorowanie* $\Gamma : \mathbb{A} \multimap \mathbb{B}$ *jest ciągłe i ma niepuste, zwarte wartości, to odwzorowanie* $\tilde{\Gamma} : \mathbb{A} \multimap \mathbb{B}$ *określone wzorem* $\tilde{\Gamma}(x) = \mathrm{Argmax}_{y \in \Gamma(x)} f(x,y)$ *jest górnie półciągłe, a funkcja* $M(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} f(x,y)$ *jest ciągła.*

**4.3. Punkty stałe.** W zagadnieniach równowagi ogólnej będę nam potrzebne twierdzenia o punkcie stałym, które nie wchodzą w zakres podstawowego kursu topologii.

W przypadku, gdy mamy do czynienia z funkcją, punkt stały jest to taki punkt, który jest równy swojej wartości przy tej funkcji.

**Twierdzenie 4.19.** *(twierdzenie Brouwera o punkcie stałym)*

*Jeżeli* $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ *jest zbiorem niepustym, zwartym i wypukłym a funkcja* $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *jest ciągła, to istnieje* $x \in \mathbb{K}$, *takie że* $x = f(x)$.

Istnieją też inne sformułowania twierdzenia Brouwera, w których $\mathbb{K}$ jest kulą lub sympleksem.

W przypadku odwzorowań wielowartościowych punkt stały to punkt, który należy do swojej wartości.

**Twierdzenie 4.20.** *(twierdzenie Kakutaniego o punkcie stałym)*

*Jeżeli* $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ *jest zbiorem niepustym, zwartym i wypukłym a odwzorowanie* $\Gamma : \mathbb{K} \multimap \mathbb{K}$ *o niepustych, zwartych, wypukłych wartościach jest górnie półciągłe lub ma wykres domknięty, to istnieje* $x \in \mathbb{K}$, *takie że* $x \in \Gamma(x)$.

## 5. Optymalizacja konsumenta

Kto to jest konsument? Choć by sformułować jego zagadnienie optymalizacyjne nie potrzebujemy dokładnej interpretacji, lepiej zawsze wiedzieć, co będziemy rozumieć przez omawiany teoretyczny obiekt.

Otóż konsumentami jesteśmy my wszyscy w większości codziennych wyborów, nie tylko w restauracji czy sklepie spożywczym. Konsumentem jest klient kancelarii adwokackiej, podróżujący koleją, kupujący lodówkę, kwiaty albo bilet do opery, wpłacający pieniądze do banku... Dowolny nadywca dóbr lub usług. W mikroekonomii nie będziemy rozróżniali pomiędzy tymi dwoma pojęciami i określimy je łącznym pojęciem "dobra".

Co więcej, konsumentami jesteśmy nawet, kiedy leżymy pod gruszą i nic nie robimy: wówczas konsumujemy czas wolny!

Teraz sformalizujemy zagadnienie optymalizacji konsumenta. Konsument jest podejmującym decyzję, więc cała streszczona uprzednio teoria wyboru ma zastosowanie.

Zbiór możliwości konsumenta określamy mianem *zbioru konsumpcji*. Zakładamy, że wszystkie współrzędne (których może być nawet nieskończenie wiele) jego elementów są nieujemne i zazwyczaj mogą być dowolnie duże. W praktyce będziemy zakładać, że mamy do czynienia z $n$ dobrami, a więc $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n_+$. Elementy zbioru konsumpcji nazywamy *koszykami* (czasem też używa się słowa *wiązka*).

Zbiory budżetowe mogą być różne w różnych sytuacjach, jednak w standartowych zastosowaniach będą to *walrasowskie zbiory budżetowe* $B_{\mathbf{p},m} = \{x \in \mathbb{X} : x^T\mathbf{p} \leq m\}$.

**5.1. Podejście maksymalizacji użyteczności w modelu konsumenta.** Do zdefiniowania w pełni zagadnienia optymalizacyjnego pozostało nam jeszcze określić relację preferencji konsumenta. Skoro używamy słowa "dobra", naturalnym założeniem jest, aby nie były one "złem", czyli aby relacja preferenecji była monotoniczna. Jak to uzyskać, jeśli rozważamy np. zagadnienie wyboru długości czasu pracy albo poziomu zanieczyszczeń? – Wystarczy złożyć "zło" z funkcją ściśle malejącą np. odjąć liczbę przepracowanych godzin od maksymalnego możliwego czasu pracy – wówczas otrzymamy już rzeczywiste dobro – odpoczynek.

Zakłada się również, że konsument nigdy nie jest nasycony i że zawsze "w dowolnie małym zasięgu ręki" znajduje się koszyk lepszy, a więc relacja preferencji jest lokalnie nienasycona.

Przeważnie przyjmujemy również ścisłą monotoniczność (nie jest to spełnione np. przez dobra doskonale komplementarne) i wypukłość (co implikuje, że koszyk "pośredni" będący kombinacją wypukłą dwóch koszyków o jednakowej wartości jest od nich niegorszy), a nawet ścisłą wypukłość (co implikuje, że koszyk "pośredni" jest lepszy). Co więcej, zazwyczaj będziemy pracować z wklęsłą, różniczkowalną funkcją użyteczności.

Odtąd przez *założenia standartowe modelu konsumenta* będziemy rozumieć, że preferencje są lokalnie nienasycone, monotoniczne, ciągłe, wypukłe, a jeśli mówimy o konkretnej odzwierciedlającej je funkcji użyteczności, to zakładamy ponadto, że jest ciągła.

Przy tych założeniach do znalezienia punktów optymalnych możemy stosować, jak w przykładzie 4.3, mnożniki Lagrange'a.

Odtąd będziemy rozważać zbiór konsumpcyjny $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n_+$, walrasowskie zbiory budżetowe $B_{\mathbf{p},m} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{p}^T x \leq m\}$ dla wektora $\mathbf{p}$ o wszystkich współrzędnych dodatnich i quasi wklęsłą ciągłą niemalejącą funkcję użyteczności $u$.

Dlaczego zakładamy, że ceny są ściśle dodatnie? Co by było gdyby ceny były zerowe: czekolada na gorąco w Kubusiu za darmo – po pierwsze nie opłacałoby się jej sprzedawać... Czasem jednak zdarza się że ceny są zerowe – chociażby za powietrze nie musimy płacić. To ma sens, jeżeli dobro, które rozważamy nie jest *rzadkie* – wówczas po prostu nie ma możliwości nadmiernego wykorzystania. W przeciwnym przypadku powstają tak zwane efekty zewnętrzne – inni ponoszą konsekwecje naszego zachowania. Tę kwestię poruszymy jeszcze raz dokładniej przy okazji podejmowania decyzji przez producenta.

Przyjęcie walrasowskiego zbioru budżetowego, oznacza, że zakładamy, że konsument dysponuje dochodem $m$ i przyjmuje ceny $\mathbf{p}$ (dodatnie) jako dane, czyli jest "biorcą cen" – przy optymalizacji nie bierze pod uwagę swojego wpływu na ceny.

Tak więc, jak w ogólnej teorii wyboru, będziemy rozważać następującą sytuację: dla każdego zbioru budżetowego konsument maksymalizuje swoją użyteczność na tym zbiorze. Ponieważ rodzina zbiorów budżetowych jest indeksowana poziomem cen i dochodem, możemy patrzeć zarówno na wybór w konkretnej sytuacji, jak i na samą użyteczność wybranego koszyka, jako na funkcję tych dwóch parametrów.

**Definicja 5.1.** *Funkcję* $v : \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *zdefiniowaną wzorem* $v(\mathbf{p}, m) = \max_{\mathbf{p}^T x \leq m} u(x)$ *nazywamy* niejawną funkcją użyteczności *(*indirect utility function*), a odwzorowanie* $x : \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$ *zdefiniowane wzorem* $x(\mathbf{p}, m) = \operatorname{Argmax}_{\mathbf{p}^T x \leq m} u(x)$ odwzorowaniem popytu *(także* odwzorowaniem popytu Marshalla*, albo* Walrasa*).*

Będą nas interesować własności zdefiniowanych obiektów.

Oczywistym jest, że przy standartowych założeniach $x$ ma niepuste wartości.

Niejawna funkcja użyteczności może być traktowana jako obiekt teoretyczny, ponieważ, podobnie jak w przypadku funkcji użyteczności, trudno jest przypisać konkretne wartości liczbowe, jednak istotne są jej własności porządkowe: większa wartość niejawnej funkcji użyteczności oznacza, że sytuację, czyli zbiór budżetowy, uważamy z lepszą. Czyli ankiety z pytaniami postaci "czy uważa pan/pani obecną sytuację za lepszą niż przed rokiem?" określają preferencje na zbiorze zbiorów budżetowych odpowiadające niejawnej funkcji użyteczności.

Popyt Marshalla jest natomiast bardzo praktyczny – to, co wybieramy w konkretnych sytuacjach: to on właśnie, po zagregowaniu, jest zawarty w statystykach. Jeżeli jest funkcją, to określa jedyny możliwy wybór ze zbioru budżetowego.

**Stwierdzenie 5.2.** *a) Jeśli konsument ma quasi-wklęsłą funkcje użyteczności, to odwzorowanie popytu $x$ ma wypukłe wartości, a jeśli ściśle quasi-wklęsłą, to odwzorowanie popytu $x$ jest funkcją;*

*b) Jeśli preferencje są lokalnie nienasycone, to odwzorowanie popytu spełnia* prawo Walrasa*: $\forall y \in x(\mathbf{p}, m)$ zachodzi równość $\mathbf{p}^T y = m$;*

*c) Odwzorowanie popytu jest jednorodne stopnia* 0*;*

*d) Jeśli funkcja użyteczności jest ciągła, to odwzorowanie popytu jest górnie półciągłe (jeśli jest funkcją, to jest to funkcja ciągła) i ma niepuste wartości.*

**Stwierdzenie 5.3.** *Własności niejawnej funkcji użyteczności $v$.*

*a) Funkcja $v$ jest niemalejącą funkcją $m$ i nierosnącą $p_i$, a jeśli preferencje są lokalnie nienasycone, to ponadto jest ścisle rosnącą funkcją $m$;*

*b) Funkcja $v$ jest jednorodna stopnia* 0*;*

*c) Funkcja $v$ jest quasi-wypukła ze względu na $p$;*

*d) Jeśli funkcja użyteczności jest ciągła, to $v$ jest ciągła.*

**Dowód obu stwierdzeń:** Punkty 5.2 a), b) i c) oraz 5.3 a) i b) są natychmiastowe. Pozostaje więc udowodnić pozostałe trzy.

5.3 c) Weźmy dowolne wektory cen $\mathbf{p}$ i $\mathbf{p}'$ i $t \in (0, 1)$. Niech $\mathbf{p}'' = t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{p}'$.

Łatwo pokazać, że zbiór $B_{\mathbf{p}'',m} \subseteq B_{\mathbf{p},m} \cup B_{\mathbf{p}',m}$. Przypuśmy przeciwnie – czyli dla pewnego $x$ spełniającego $(\mathbf{p}'')^T x \leq m$ zachodzi wówczas $\mathbf{p}^T x > m$ i $(\mathbf{p}')^T x > m$. Jeśli pomnożymy te nierówności przez $t$ i $(1-t)$, odpowiednio i dodamy stronami, dostaniemy $(\mathbf{p}'')^T x > m$ – sprzeczność.

Tak więc $v(\mathbf{p}'', m) = \max_{x \in B_{\mathbf{p}'',m}} u(x) \leq \max_{x \in B_{\mathbf{p},m} \cup B_{\mathbf{p}',m}} u(x) =$
$= \max\left(\max_{x \in B_{\mathbf{p},m}} u(x), \max_{x \in B_{\mathbf{p}',m}} u(x)\right) = \max(v(\mathbf{p}, m), v(\mathbf{p}', m))$.

Własności 5.2 d) i 5.3 d) dowodzimy łącznie z twierdzenia o maksimum 4.18. Musimy pokazać ciągłość odwzorowania, oznaczmy je przez $\Gamma$, które przyporządkowuje $(\mathbf{p}, m)$ zbiór $B_{\mathbf{p},m}$.

**Górna półciągłość**. Udowodnimy górną półciągłość z definicji. Reszta to bonus dla tych, co chodzą na wykład.

**Dolna półciągłość**. Ponieważ przeciwobrazy dolne zachowują się przy sumowaniu zbiorów, wystarczy ograniczyć się do bazy zbiorów otwartych – kul otwartych w naszej normie na zbiorze $\mathbb{X}$. Reszta to bonus dla tych, co chodzą na wykład.

■

**Stwierdzenie 5.4.** *(Tożsamość Roya)*

*Jeżeli spełnione są założenia modelu konsumenta, funkcja użyteczności jest różniczkowalna, odwzorowanie popytu $x$ jest funkcją różniczkowalną, $m > 0$, $p_i > 0$ dla każdego $i$ oraz mnożnik Lagrange'a $\lambda(\mathbf{p}, m)$ jest jednoznacznie wyznaczony i różny od 0, to jeśli dla każdego $i$ $x_i(\mathbf{p}, m) > 0$, to $x_i(\mathbf{p}, m) = \frac{-\frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial m}}$.*

**Dowód:** Z twierdzenia o obwiedni pochodna funkcji maksimum po paramtrze jest równa pochodnej lagrangianu po tym parametrze, a więc $\frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial p_i} = -\lambda(\mathbf{p}, m)x_i(\mathbf{p}, m)$, a $\frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial m} = \lambda(\mathbf{p}, m)$. ■

**Przykład 5.5.** *Funkcja popytu i niejawna funkcja użyteczności dla funkcji użyteczności Cobb-Douglasa $u(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ gdzie $0 < \alpha < 1$.*

*Funkcja popytu ma postać $x_1(\mathbf{p}, m) = \frac{\alpha m}{p_1}$, $x_2(\mathbf{p}, m) = \frac{(1-\alpha)m}{p_2}$, a niejawna funkcja użyteczności $v(\mathbf{p}, m) = mp_1^{-\alpha}p_2^{\alpha-1}\alpha^a(1-\alpha)^{1-\alpha}$.*

**5.2. Minimalizacja wydatków.** Na optymalizację konsumenta możemy też spojrzeć z drugiej strony: zamiast maksymalizować użyteczność przy zadanym dochodzie, jaki możemy przeznaczyć na konsumpcję, dążyć do osiągnięcia przynajmniej takiej użyteczności jak najmniejszym kosztem.

**Rysunek 5.1**

**Definicja 5.6.** *Funkcję $e : \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ zdefiniowaną wzorem $e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \inf_{u(x)\geq\bar{u}} \mathbf{p}^T x$ (gdzie przez $\inf_{x\in\emptyset} f(x)$ rozumiemy $+\infty$) nazywamy* funkcją wydatków *(*expenditure function*), a odwzorowanie $h : \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ zdefiniowane wzorem $h(\mathbf{p}, \bar{u}) = \operatorname{Argmin}_{u(x)\geq\bar{u}} \mathbf{p}^T x$* odwzorowaniem popytu Hicksa *(czasem także* odwzorowaniem popytu skompensowanego dochodu*).*

Funkcja wydatków określa, ile minimalnie muszę wydać, aby przy cenach $p$ móc zapewnić sobie konsumpcję o użyteczności $\bar{u}$.

**Stwierdzenie 5.7.** *Jeżeli $u$ jest ciągła, to odwzorowanie popytu Hicksa ma niepuste wartości, a funkcja wydatków jest skończona dla dowolnego $\bar{u} < \sup_{x\in\mathbb{X}} u(x)$.*

**Dowód:** Zbiór $A = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : u(x) \geq \bar{u}\}$ jest w tej sytuacji niepusty, domknięty. Niech pewien $\bar{x}$ nalezy do tego zbioru. Wówczas zbiór $A \cap \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x \leq \bar{x}\}$ jest niepusty, zwarty, a ponieważ wszystkie $p_i > 0$, $\operatorname{Argmin}_{x\in A} \mathbf{p}^T x = \operatorname{Argmin}_{x\in A\cap\{x\in\mathbb{R}^n_+ : x\leq\bar{x}\}} \mathbf{p}^T x$. Mamy więc problem minimalizacji funkcji ciągłej na zbiorze zwartym. ■

**5.3. Związki pomiędzy zagadnieniami maksymalizacji użyteczności i minimalizacji wydatków.** Zagadnienia maksymalizacji użyteczności i minimalizacji wydatków są względem siebie dualne.

**Rysunek 5.2**

Aby zachodził poniższy fakt, nie potrzeba pełnych założeń modelu konsumenta

**Stwierdzenie 5.8.** *Jeżeli funkcja $u$ jest ciągła, preferencje są lokalnie nienasycone, monotoniczne i istnieje rozwiązanie problemu minimalizacji wydatków, to:*

*a)* $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})) = \bar{u}$;

*b)* $x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})) = h_i(\mathbf{p}, \bar{u})$ *dla* $i = 1, \ldots, n$;

*c)* $e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = m$;

*d)* $h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = x_i(\mathbf{p}, m)$ *dla* $i = 1, \ldots, n$. ■

**5.4. Minimalizacja wydatków ponownie.**

**Stwierdzenie 5.9.** *Własności popytu Hicksa.*

*a) Jeśli funkcja użyteczności jest quasi-wklęsła to odwzorowanie popytu Hicksa $h$ ma wartości wypukłe, a jeżeli jest ściśle quasi-wklęsła, to $h$ jest co najwyżej jednowartościowe;*

*b) Jeśli preferencje są monotoniczne, lokalnie nienasycone a $u$ jest ciągła, to* nie ma nadmiarowej użyteczności, *tzn. dla $\bar{u} \geq \inf u(\mathbb{X})$ jeśli $x \in h(\mathbf{p}, \bar{u})$, to $u(x) = \bar{u}$;*

*c) Dla ustalonego $\bar{u}$ odwzorowanie $h(\cdot, \bar{u})$ jest jednorodne stopnia $0$ jako odwzorowanie $\mathbf{p}$;*

*d) Odwzorowanie popytu Hicksa przy ustalonym $\bar{u}$ $h(\cdot, \bar{u})$ jest ciągłe jako odwzorowanie $\mathbf{p}$, a jeśli funkcja $u$ jest ciągła, lokalnie nienasycona, to $h$ obcięte do zbioru $\{(\mathbf{p}, \bar{u}) : \bar{u} < \sup_{x \in \mathbb{X}} u(x)\}$ jest górnie półciągłe łącznie ze względu na wszystkie zmienne.*

**Stwierdzenie 5.10.** *Własności funkcji wydatków.*

*a) Funkcja $e$ jest niemalejącą funkcją $p$ i $\bar{u}$, a jeśli preferencje są monotoniczne, lokalnie nienasycone i $u$ jest ciągła, to ściśle rosnącą $\bar{u}$ dla $\bar{u} < \sup_{x \in \mathbb{X}} u(x)$;*

*b) Funkcja $e$ jest jednorodna stopnia $1$ ze względu na $\mathbf{p}$;*

*c) Funkcja $e$ jest wklęsła ze względu na $\mathbf{p}$;*

*d) Funkcja $e$ przy ustalonym $\bar{u}$ $e(\cdot, \bar{u})$ jest ciągła ze względu na $\mathbf{p}$, a jeśli funkcja $u$ jest ciągła, lokalnie nienasycona, to $e$ obcięta do zbioru $\{(\mathbf{p}, \bar{u}) : \bar{u} < \sup_{x \in \mathbb{X}} u(x)\}$ jest ciągła łącznie ze względu na wszystkie zmienne.*

*e) Jeśli preferencje są monotoniczne, lokalnie nienasycone, a $u$ jest, ciągła, to* $\lim_{\bar{u} \to \sup_{x \in \mathbb{X}} u(x)} e(\mathbf{p}, \bar{u}) = +\infty$.

**Dowód:obu stwierdzeń:** Punkty 5.9 a) i c) oraz 5.10 a) i b) są natychmiastowe. Pozostaje więc udowodnić pozostałe pięć.

5.10 c) Weźmy dowolne wektory cen $\mathbf{p}$ i $\mathbf{p}'$ i $t \in (0,1)$. Niech $\mathbf{p}'' = t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{p}'$. $e(\mathbf{p}'', \bar{u}) = \min_{\{x:u(x)\geq\bar{u}\}}(\mathbf{p}'')^T x = \min_{\{x:u(x)\geq\bar{u}\}}(t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{p}')^T x \geq$
$\geq t\min_{\{x:u(x)\geq\bar{u}\}}\mathbf{p}^T x + (1-t)\min_{\{x:u(x)\geq\bar{u}\}}(\mathbf{p}')^T x = te(\mathbf{p},\bar{u}) + (1-t)e(\mathbf{p}',\bar{u})$.

5.9 b) Minimum funkcji liniowej na zbiorze może być przyjmowane jedynie na jego brzegu. Ponieważ preferencje są monotoniczne, lokalnie nienasycone, więc poza $\bar{u} \leq \min u(\mathbb{X})$ nie będzie to $\mathbf{0}$. Niech więc punkt $\bar{x}$, w którym jest przymowane minimum będzie punktem z brzegu zbioru $\{x : u(x) \geq \bar{u}\}$ i niech $u(\bar{x}) > \bar{u}$. Wówczas dla pewnego małego $\varepsilon$, z ciągłości $u$ w pewnym otoczeniu $\bar{x}$ istnieje taki $x \leq \bar{x}$ z przynajmniej jedną nierównością ostrą, dla którego $u(x) > u(\bar{x}) - \varepsilon > \bar{u}$. Z nierówności na współrzędnych $\mathbf{p}^T x < \mathbf{p}^T \bar{x}$ – sprzeczność.

5.10 e) Weźmy ciągi $x_k^T = (\frac{k}{p_1}, \ldots, \frac{k}{p_n})$ i $u_k = u(x_k)$. Niech $y_k \in h(\mathbf{p}, u_k)$. Ponieważ preferencje są monotoniczne, lokalnie nienasycone, przynajmniej jedna współrzędna $y_k$ musi być co namniej równa analogicznej współrzędnej $x_k$, co daje $\mathbf{p}^T y_k \geq k$, czyli $e(\mathbf{p}, u_k) \geq k$. Stąd i z tego, że $e$ jest ściśle rosnąca po $\bar{u}$ dostajemy $\lim_{\bar{u}\to\sup_{x\in\mathbb{X}} u(x)} e(\mathbf{p},\bar{u}) \geq \lim_{k\to\infty} e(\mathbf{p}, u_k) = +\infty$.

5.9 d) i 5.10 d) dowodzimy łącznie z twierdzenia o maksimum 4.18.

Najpierw dla ustalonego $\bar{u}$. Odwzorowanie $\Gamma$, które przyporządkowuje $\mathbf{p}$ zbiór $\{x : u(x) \geq \bar{u}\}$ jest niezależne od $p$, a więc jest ciągłe (przeciwobrazem dowolnego rodzaju dowolnego zbioru otwartego jest albo $\emptyset$ albo całe $\operatorname{Int}\mathbb{R}^n_+$ – otwarte). W twierdzeniu o maksimum potrzebujemy jednak dodatkowo zwartych wartości. Aby to uzyskać, musimy ograniczyć się – przynajmniej lokalnie do szukania minimum na zbiorze zwartym. Weźmy zatem dowolne $\bar{x}$ dla którego $u(\bar{x}) \geq \bar{u}$. Jeśli ograniczymy się do zbioru $A = \{x : u(x) \geq \bar{u}\} \cap \{x : \mathbf{p}^T x \leq M\}$ dla $M > \sum_{i=1}^n (p_i + \delta)\bar{x}_i$, to dla $\mathbf{p}'$ bliskich $\mathbf{p}$: takich, że dla każdego $i$ $|p_i - p_i'| < \delta$ zachodzi $\operatorname{Argmin}_{u(x)\geq\bar{u}}(\mathbf{p}')^T x = \operatorname{Argmin}_{x\in A}(\mathbf{p}')^T x$, a więc sprowadziliśmy nasze zagadnienie do zagadnienia maksymalizacji po zbiorach zwartych, niezależnych od $\mathbf{p}$, tak więc mamy tezę z twierdzenia o maksimum.

Teraz zajmiemy się globalną ciągłością. Aby to uzyskać, musimy pokazać ciągłość odwzorowania, oznaczmy je przez $\Gamma$, które przyporządkowuje $(\mathbf{p}, \bar{u})$ zbiór $\{x : u(x) \geq \bar{u}\}$. Dodatkowo podobnie będziemy musieli uzwarcić wartości – podobnie jak poprzednio. Dalszy schemat dowodu podobny do dowodu stwierdzeń 5.2 d) i 5.3 d). ■

**Stwierdzenie 5.11.** (Lemat Shepharda)

*Jeżeli funkcja użyteczności jest różniczkowalna, monotoniczna, lokalnie nienasycona, a odwzorowanie popytu Hicksa $h$ jest funkcją różniczkowalną po $\mathbf{p}$; $u < \sup_{x\in\mathbb{X}} u(x)$, $p_i > 0$ dla każdego $i$ oraz mnożnik Lagrange'a $\lambda(\mathbf{p},\bar{u})$ jest jednoznacznie wyznaczony, to jeśli dla każdego $i$ $h_i(\mathbf{p}, u) > 0$, to*

*a)* $h_i(\mathbf{p},\bar{u}) = \frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i}$, *b) jeżeli ponadto funkcja $h$ jest różniczkowalna jako funkcja* $\mathbf{p}$, *macierz* $\left[\frac{\partial h_i}{\partial p_j}\right]$ *jest symetryczna, niedodatnio określona, w szczególności* $\frac{\partial h_i}{\partial p_i} \le 0$ *(tzw.* ujemny efekt cenowy Hicksa*).*

**Dowód:** a) Wynika natychmiast z zastosowania twierdzenia o obwiedni.

b) Uzyskujemy, różniczkując $e$ po $\mathbf{p}$ dwukrotnie – z a) i wklęsłości $e$ po $\mathbf{p}$. ■

**Przykład 5.12.** *Funkcja popytu Hicksa dla funkcji użyteczności Cobb-Douglasa:* $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$ *gdzie* $0 < a < 1$ *ma postać*

$h_1(\mathbf{p}, \bar{u}) = \left(\frac{ap_2}{(1-a)p_1}\right)^{1-a} \bar{u}$, $h_2(\mathbf{p}, \bar{u}) = \left(\frac{(1-a)p_1}{ap_2}\right)^{a} \bar{u}$, *a funkcja wydatków* $e(\mathbf{p}, \bar{u}) = a^{-a}(1-a)^{a-1}p_1^a p_2^{1-a}\bar{u}$.

*Możemy to albo pracowicie policzyć z mnożników Lagrange'a lub Kuhna-Tuckera, albo korzystając ze stwierdzenia 5.8 odwrócić wcześniej policzoną funkcję $v$ ze względu na $m$.*

Odwzorowania popytu Hicksa, nawet jeśli nie są funkcjami różniczkowalnymi mają ponadto tę interesującą własność, że popyt zmienia się ”w kierunku przeciwnym do zmiany ceny”. Formalnie zachodzi następujący fakt:

**Stwierdzenie 5.13.** *Jeśli* $h(\mathbf{p}, \bar{u}) \cap h(\mathbf{p}', \bar{u}) = \emptyset$, *to dla każdego* $x \in h(\mathbf{p}, \bar{u})$, $x' \in h(\mathbf{p}', \bar{u})$ *zachodzi nierówność* $(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^T (x' - x) < 0$.

**Dowód:** Rozłóżmy $(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^T (x' - x) = ((\mathbf{p}')^T x' - (\mathbf{p}')^T x) + (\mathbf{p}^T x - \mathbf{p}^T x')$.

Pierwszy nawias jest ujemny, ponieważ minimum $(\mathbf{p}')^T x$ na zbiorze $\{x : u(x) \ge \bar{u}\}$ jest przyjmowane na $h(\mathbf{p}', \bar{u})$, a $x'$ nie należy do $h(\mathbf{p}', \bar{u})$, drugi analogicznie. ■

**5.5. Funkcje popytu i ich własności.** W niniejszym rozdziale skoncentrujemy się na samych odwzorowaniach popytu. Będziemy badać, jak się zmienia zachowanie konsumenta, kiedy zmieniają się warunki wyboru.

To, co mamy przeważnie dane z badań rynku, to pewna selekcja z odwzorowania $x$. Odtąd będziemy zakładać, że jest to jedyna możliwa selekcja z $x$, czyli że *odzworowanie popytu $x$ jest funkcją*. W dalszych rozważaniach będziemy ponadto zakładać, że jest to funkcja różniczkowalna.

Ponieważ $x$ jest funkcją wielu zmiennych, aby badać interesujące nas efekty, będziemy często ustalać część zmiennych i przy tym założeniu badać własności funkcji popytu jako funkcję wyróżnionych zmiennych. Ponieważ te obiekty badano już, zanim pojawiła się formalna teoria wyboru, mają swoje nazwy:

**Definicja 5.14.** *Przy ustalonym wektorze cen* $\mathbf{p}$ *funkcję* $x(\mathbf{p}, \cdot)$ *nazywamy* ścieżką ekspansji dochodu, *natomiast funkcje* $x_i(\mathbf{p}, \cdot)$ – krzywymi Engla *(*Engel curves*).*

*Przy ustalonych cenach $p_j$ dla $j \ne i$ i dochodzie $m$, funkcje* $x_i(p_1, \ldots, p_{i-1}, \cdot, p_{i+1}, \ldots, p_n, m)$ *nazywamy* krzywymi oferty cenowej.

Będziemy badać, jak reagują funkcje popytu na zmianę tylko jednego parametru.

Zaczniemy od zbadania, jak zmienia się popyt w zależności od dochodu. Zazwyczaj naturalnym założeniem jest, że im większy mamy dochód, tym więcej danego typu dóbr konsumujemy (jest to sytuacja normalna, stąd poniższe określenie). Jednak nie zawsze musi tak być.

**Definicja 5.15.** *Dobro $i$ nazywamy* normalnym przy cenach $\mathbf{p}$ i dochodzie $\bar{m}$, *jeśli* $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},\bar{m})}{\partial m} > 0$. *Jeśli* $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},\bar{m})}{\partial m} < 0$, *to dobro $i$ jest* podrzędne *(*niższego rzędu, poślednie*)* *przy cenach $\mathbf{p}$ i dochodzie $\bar{m}$. Dobro $i$ jest* normalne, *jeśli jest normalne przy każdych cenach i poziomie dochodu.*

Można też definiować normalność/podrzędność $i$ w konkretnym punkcie jako warunek, że $x_i$ jest jest rosnąca/malejąca jako funkcja $m$ w pewnym otoczeniu $\bar{m}$ (i, w zasadzie, to jest to, o co nam naprawdę chodzi). Takie pojęcia normalności/podrzędności nie są równoważne powyższej definicji nawet dla funkcji różniczkowalnych, ale na pewno wynikają z niego.

**Rysunek 5.3**

**Rysunek 5.4**

Oczywiście żadne dobro nie może być podrzędne przy ustalonym wektorze cen dla wszystkich poziomów dochodu.

Przykładem dóbr podrzędnych są wszelkie produkty niskiej jakości, dla których istnieją "odpowiedniki" lepszej jakości: np. mortadela, obuwie ze Stadionu Dziesięciolecia.

Jeżeli natomiast jako dobro rozważamy całą klasę dóbr np. żywność czy odzież, to na pewno mamy do czynienia z dobrem normalnym.

Jeśli już ustaliliśmy, że mamy do czynienia z dobrem normalnym, pojawia się kolejne pytanie: jak szybko rośnie popyt – wolniej czy szybciej niż dochód. Aby móc analizować tego typu zależności, potrzebne będzie nam nowe pojęcie: *elastyczność*. Zaczniemy od ogólnej definicji elastyczności jednej wielkości względem drugiej.

**Definicja 5.16.** *Jeżeli rozważamy zależność pomiędzy rzeczywistymi wielkościami $x$ i $y$ określoną funkcją $f(x) = y$, to* elastycznością $y$ względem $x$ *nazywamy wielkość* $\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x}}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{f'(x)}{f(x)}x$.

Ekonomiści interpretują tę definicję w sensie przybliżonym: "o ile procent zmieni się $y$ jeśli $x$ zmieni się o 1%".

W modelu konsumenta będziemy badać elastyczności popytu:

**Definicja 5.17.** Elastyczność dochodowa popytu na dobro $i$ $\varepsilon_i^D = \frac{\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m}}{\frac{x_i(\mathbf{p},m)}{m}}$,

elastyczność cenowa popytu na dobro $i$ $\varepsilon_i = \frac{\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial p_i}}{\frac{x_i(\mathbf{p},m)}{p_i}}$,

elastyczność krzyżowa popytu na dobro $i$ ze względu na cenę dobra $j$ $\varepsilon_{i,j} = \frac{\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial p_j}}{\frac{x_i(\mathbf{p},m)}{p_j}}$,

elastyczność cenowa popytu Hicksa na dobro $i$ $\varepsilon_i^H = \frac{\frac{\partial h_i(\mathbf{p},u)}{\partial p_i}}{\frac{h_i(\mathbf{p},u)}{p_i}}$.

Z elastycznością dochodową związany jest kolejny podział dóbr normalnych:

**Definicja 5.18.** *Dobro $i$ jest* dobrem niezbędnym, *jeśli* $0 < \varepsilon_i^D < 1$, *a* dobrem luksusowym, *jeśli* $\varepsilon_i^D > 1$.

Innymi słowy, dobro niezbędne to takie, na które popyt rośnie wolniej niż dochód (np. chleb), a dobro luksusowe to takie, na które popyt rośnie szybciej niż dochód (np. biżuteria).

Teraz zajmiemy się *efektem cenowym*. Jak wykazaliśmy uprzednio, efekt cenowy Hicksa jest zawsze mniejszy bądź równy 0. Jak jest w przypadku zwykłej funkcji popytu?

Tym razem też naturalne wydaje się założenie, że popyt na dobro maleje ze wzrostem ceny. Jednak nie zawsze tak jest. Kontrprzykład pochodzi od dziewiętnastowiecznego ekonomisty (czyli, jak należy się domyślać, został zaobserwowany, nie wymyślony), Giffena, skąd nazwa:

**Definicja 5.19.** *Dobro $i$ nazywamy* dobrem Giffena, *jeśli* $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial p_i} > 0$ *dla pewnego* $\mathbf{p}$ *i* $m$.

**Rysunek 5.5**

Dobro może być dobrem Giffena zgodnie z naszą teorią, która nie bierze pod uwagę ani tzw. efektu snoba (funkcja użyteczności zależy również od ceny) ani sygnalizacji w przypadku niepełnej informacji (dobro jest drogie, to znaczy zapewne dobrej jakości, której bez tego nie potrafiłbym sam określić – dobro tanie nie może być dobrej jakości). Są to zawsze dobra podrzędne, i to, można powiedzieć, "bardzo podrzędne". Giffen podał za przykład ziemniaki.

**Przykład 5.20.** *Ziemniaki stanowią podstawę wyżywienia Patricka O'Briana. Ze względu na korzystny stosunek wartości odżywczej do ceny, może przy ich pomocy spełnić wymagania dietetyczne na w miarę przyzwoitym poziomie, od czasu do czasu stać go nawet na to, żeby obiad składający się z samych ziemniaków wzbogacić mięsem (wówczas zjada mniej ziemniaków). Kiedy wskutek zarazy ziemiaczanej cena ziemniaka wzrosła, Patricka już nie stać na luksus, jakim jest mięso. Musi kupować więcej ziemniaków (mimo wszystko znacznie tańszych niż mięso), żeby nie głodować.*

Aby zakończyć definiowanie różnych pojęć związanych ze znakami efektów, musimy jeszcze wspomnieć o efektach mieszanych, czyli $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial p_k}$ dla $i \neq k$: otrzymamy rozszerzenie klasy doskonałych substytutów i dóbr doskonale komplementarnych.

**Definicja 5.21.** *a) Dobra $i$ i $k$ są* substytutami *przy cenach* $\mathbf{p}$ *i wielkości dochodu* $m$, *jeśli* $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial p_k} > 0$ *i* $\frac{\partial x_k(\mathbf{p},m)}{\partial p_i} > 0$.

*b) Dobra $i$ i $k$ są* komplementarne *przy cenach* $\mathbf{p}$ *i wielkości dochodu* $m$, *jeśli* $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial p_k} < 0$ *i* $\frac{\partial x_k(\mathbf{p},m)}{\partial p_i} < 0$.

Zobaczmy, co można powiedzieć o efektach i elastycznościach jedynie przy założeniu podstawowych własności: jednorodności stopnia 0 i prawa Walrasa.

**Stwierdzenie 5.22.** *Jeśli funkcja $x$ jest różniczkowalna i jednorodna stopnia* 0, *to dla każdego $i$*

*a)* $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m} m = 0,$

*b)* $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{i,k} + \varepsilon_i^D = 0.$

**Dowód:** a) Jednorodność stopnia 0 oznacza, że $x_i(\mathbf{p}, m) = x_i(t\mathbf{p}, tm)$. Zróżniczkowanie tego równania po $t$ daje nam pożądaną równość.

b) Dzielimy równanie a) przez $x_i(\mathbf{p}, m)$. ■

**Stwierdzenie 5.23.** *Jeśli funkcja $x$ jest różniczkowalna i spełnia prawo Walrasa, to*

*a)* $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial p_k} p_i + x_k(\mathbf{p}, m) = 0,$

*b)* $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m} p_i = 1.$

**Dowód:** Prawo Walrasa oznacza, że $\mathbf{p}^T x(\mathbf{p}, m) = m$. Zróżniczkowanie tego równania po $p_k$ daje nam pożądaną równość a), a po $m$ – b). ■

Słaby aksjomat ujawnionych preferencji dla zagadnienia optymalizacji konsumenta historycznie poprzedza słaby aksjomat ujawnionych preferencji w ogólnej teorii wyboru. Ma on postać, którą łatwo wyprowadzić, jeżeli przyjmiemy dodatkowe założenie, że odwzorowanie popytu jest jednowartościowe:

**Definicja 5.24.** Słaby aksjomat ujawnionych preferencji dla zagadnienia optymalizacji konsumenta (SAUP) *to następująca implikacja:*
*jeżeli* $\mathbf{p}^T x(\mathbf{p}', m') \leq m$ *i* $x(\mathbf{p}', m') \neq x(\mathbf{p}, m)$, *to* $(\mathbf{p}')^T x(\mathbf{p}, m) > m'$.

Konsekwencją słabego aksjomatu ujawnionych preferencji jest bardzo silny fakt, który ekonomiści nazywają *skompensowanym prawem popytu.* Mówi ono, że zmiana popytu jest "przeciwna" do kierunku zmiany ceny, jeżeli rozważymy zmianę ceny skompensowaną zmianą dochodu, taką, aby uprzednio konsumowany koszyk był nadal na naszym ograniczeniu budżetowym.

**Definicja 5.25.** Skompensowane prawo popytu:
*Dla każdego* $\mathbf{p}, \mathbf{p}', m, m'$ *takich, że* $m' = (\mathbf{p}')^T x(\mathbf{p}, m)$ *zachodzi nierówność* $(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^T (x(\mathbf{p}', m') - x(\mathbf{p}, m)) \leq 0$ *z ostrą nierównością, jeśli* $x(\mathbf{p}', m') \neq x(\mathbf{p}, m)$.

**Stwierdzenie 5.26.** *Jeżeli funkcja popytu* $x$ *jest jednorodna stopnia* $0$ *i spełnia prawo Walrasa, to* $x$ *spełnia słaby aksjomat ujawnionych preferencji wtedy i tylko wtedy, gdy* $x$ *spełnia skompensowane prawo popytu.*

**Dowód:**
($\Rightarrow$) Jeśli $x(\mathbf{p}', m') = x(\mathbf{p}, m)$ to, oczywiście, $(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^T (x(\mathbf{p}', m') - x(\mathbf{p}, m)) = 0$.
W przeciwnym przypadku – $x(\mathbf{p}', m') \neq x(\mathbf{p}, m)$ mamy
$(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^T (x(\mathbf{p}', m') - x(\mathbf{p}, m)) = (\mathbf{p}')^T (x(\mathbf{p}', m') - x(\mathbf{p}, m)) + \mathbf{p}^T (x(\mathbf{p}, m) - x(\mathbf{p}', m'))$.
Ponieważ zmiana jest skompensowana, $(\mathbf{p}')^T x(\mathbf{p}, m) = m'$, a z prawa Walrasa wynika, że $(\mathbf{p}')^T x(\mathbf{p}', m') = m'$. Stąd $(\mathbf{p}')^T (x(\mathbf{p}', m') - x(\mathbf{p}, m)) = 0$.
Z tego, że $(\mathbf{p}')^T x(\mathbf{p}, m) = m'$ wynika, na mocy SAUP, że $\mathbf{p}^T x(\mathbf{p}', m') > m$. Stąd i z prawa Walrasa, na mocy którego $\mathbf{p}^T x(\mathbf{p}, m) = m$, wynika, że $\mathbf{p}^T (x(\mathbf{p}, m) - x(\mathbf{p}', m')) < 0$.
($\Leftarrow$) Aby dowieść tej implikacji, potrzebujemy następującego Lematu.

**Lemat 5.27.** *Jeżeli funkcja popytu* $x$ *jest jednorodna stopnia* $0$ *i spełnia prawo Walrasa, to słaby aksjomat ujawnionych preferencji jest rónoważny słabemu aksjomatowi ujawnionych preferencji dla zmian skompensowanych (i.e. tylko dla* $m' = (\mathbf{p}')^T x(\mathbf{p}, m)$*).*

Załóżmy teraz, że SAUP dla zmian skompensowanych nie zachodzi, tzn. istnieje taki $\mathbf{p}'$ i $m' = (\mathbf{p}')^T x(\mathbf{p}, m)$, że $x(\mathbf{p}, m) \neq x(\mathbf{p}', m')$ i $\mathbf{p}^T x(\mathbf{p}', m') \leq m$.
Z prawa Walrasa mamy wówczas $\mathbf{p}^T (x(\mathbf{p}, m) - x(\mathbf{p}', m')) \geq 0$ i $(\mathbf{p}')^T (x(\mathbf{p}', m') - x(\mathbf{p}, m)) = 0$, skąd $(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^T (x(\mathbf{p}', m') - x(\mathbf{p}, m)) \geq 0$, co przeczy skompensowanemu prawu popytu – dla $x(\mathbf{p}, m) \neq x(\mathbf{p}', m')$ powinniśmy uzyskać nierówność ostrą w przeciwną stronę.
■

Zauważmy, jakie są implikacje skompensowanego prawa popytu, jeśli rozważymy jedynie zmianę ceny jednego dobra: zmiana popytu na to dobro będzie przeciwna (już bez cudzysłowu) do kierunku zmiany ceny skompensowanej odpowiednim wzrostem dochodu, czyli, jak należało się spodziewać, przy skompensowanym wzroście ceny, o ile nasz popyt na to dobro się zmieni, to spadnie.

**Równanie Słuckiego i jego konsekwencje.** Teraz będziemy analizować efekty zmiany ceny, które już nie są skompensowane zmianą dochodu. W tej sytuacji już wiemy, że kierunek zmiany popytu nie musi być przeciwny do kierunku zmiany ceny np. w przypadku dóbr Giffena. Będziemy starali się rozłożyć zmianę popytu na skutek zmiany ceny na dwa efekty: jeden związany z samą zmianą stosunku cen, przy czym zmianę tę w jakiś sposób będziemy kompensować (tzw. *efekt substytucyjny*) i drugi związany ze zmianą siły nabywczej naszego dochodu (*efekt dochodowy*). Ten rozkład będziemy nazywać *równaniem Słuckiego* albo *dekompozycją Słuckiego.* W przypadku ciągłym ma on postać:

**Twierdzenie 5.28.** Ciągłe równanie Słuckiego

*Jeżeli funkcje popytu $x$ i $h$ są funkcjami różniczkowalnymi, mają wszystkie współrzędne dodatnie dla dodatniego dochodu i wywodzą się od monotonicznych, lokalnie nienasyconych preferencji o różniczkowalnej funkcji użyteczności i mnożnik Lagrange'a jest wyznaczony jednoznacznie, to*
$\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial pj} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p},v(\mathbf{p},m))}{\partial p_j} + \left(-\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m} x_j(\mathbf{p},m)\right).$

**Dowód:** Korzystamy z warunku dualności (stwierdzenie 5.8) $x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})) = h_i(\mathbf{p}, \bar{u})$ dla $\bar{u} = v(\mathbf{p}, m)$ (czyli $m = e(\mathbf{p}, \bar{u})$).

Różniczkujemy ten warunek obustronnie po $p_j$. Otrzymujemy
$\frac{\partial x_i(\mathbf{p},e(\mathbf{p},\bar{u}))}{\partial pj} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},e(\mathbf{p},\bar{u}))}{\partial m} \cdot \frac{\partial e(\mathbf{p},\bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p},\bar{u})}{\partial p_j}$. Z lematu Shepharda (5.11) $\frac{\partial e(\mathbf{p},\bar{u})}{\partial p_j} = h_j(\mathbf{p}, \bar{u}) = x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u}))$ z dualności. Podstawienie $m$ za $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ i $v(\mathbf{p}, m)$ za $\bar{u}$ i przeniesienie $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m} x_j(\mathbf{p}, m)$ kończy dowód.

■

**Wniosek 5.29.** *Jeżeli funkcje popytu $x$ i $h$ są różniczkowalne, mają wszystkie współrzędne dodatnie dla dodatniego dochodu i wywodzą się od preferencji o różniczkowalnej funkcji użyteczności, to* macierz substytucji *zdefiniowana jako* $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial pj} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m} x_j(\mathbf{p}, m)$ *jest symetryczna, niedodatnio określona.*

**Dowód:** Wynika to z równania Słuckiego (twierdzenie 5.28) i wklęsłości $e$ po $\mathbf{p}$ (stwierdzenie 5.10c)).

■

Pierwszą z wielkości występujących po prawej stronie równania Słuckiego nazywamy efektem substytucyjnym, drugą efektem dochodowym.

Jeżeli rozważamy efekt zmiany ceny tylko jednego dobra, to efekt substytucyjny jest zawsze przeciwny do kierunku zmiany ceny, ponieważ macierz $D_{\mathbf{p}}h$ jest niedodatnio określona, i nie może być zerowy, jeśli zakładamy różniczkowalność funkcji użyteczności. Natomiast znak efektu dochodowego zależy od tego, czy jest to dobro normalne czy podrzędne. W przypadku dobra podrzędnego o silnym efekcie dochodowym, dodatni efekt dochodowy może przezwyciężyć ujemny efekt substytucyjny, jak w przypadku dóbr Giffena.

Oczywiście ciągłą postać równania Słuckiego poprzedziła wersja dyskretna, a nawet dwie wersje, matematycznie trywialne. Jeśli interesować będzie nas wartość przybliżona zmiany popytu na skutek zmiany ceny z $\mathbf{p}$ na $\mathbf{p}'$, możemy skorzystać z równania Słuckiego:

$$\Delta x_i = x_i(\mathbf{p}', m) - x_i(\mathbf{p}, m) \approx \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial pj}\Delta p_j = \frac{\partial h_i(\mathbf{p},v(\mathbf{p},m))}{\partial p_j}\Delta p_j + \left(-\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_j(\mathbf{p},m)\right)\Delta p_j.$$

Wbrew temu, czego należałoby się spodziewać, dyskretne równanie Słuckiego nie jest dokładną wersją tego przybliżenia; dopiero wprowadzone później równanie Hicksa.

**Uwaga 5.30.** $\Delta x_i = x_i(\mathbf{p}', m) - x_i(\mathbf{p}, m) = x_i(\mathbf{p}', m) - x_i(\mathbf{p}', m') + x_i(\mathbf{p}', m') - x_i(\mathbf{p}, m)$.

**Definicja 5.31.** *Jeśli* $m' = \mathbf{p}'^T x(\mathbf{p}, m)$, *to powyższą tożsamość nazywamy* dyskretnym równaniem Słuckiego, $x_i(\mathbf{p}', m) - x_i(\mathbf{p}', m')$ *to* efekt dochodowy, *a* $x_i(\mathbf{p}', m') - x_i(\mathbf{p}, m)$ – efekt substytucyjny.

**Uwaga 5.32.** $\Delta x_i = x_i(\mathbf{p}', m) - x_i(\mathbf{p}, m) = x_i(\mathbf{p}', m) - h_i(\mathbf{p}', v(\mathbf{p}, m)) + h_i(\mathbf{p}', v(\mathbf{p}, m)) - x_i(\mathbf{p}, m)$.

**Definicja 5.33.** *Powyższą tożsamość nazywamy* równaniem Hicksa, $x_i(\mathbf{p}', m) - h_i(\mathbf{p}', v(\mathbf{p}, m))$ *to* efekt dochodowy Hicksa, *a* $h_i(\mathbf{p}', v(\mathbf{p}, m)) - x_i(\mathbf{p}, m)$ – efekt substytucyjny Hicksa.

Interpretacja obu dyskretnych rozkładów wektora zmiany popytu na sumę dwóch wektorów jest taka sama: efekt zmiany ceny rozkładamy na efekt substytucyjny, mający jedynie odzwierciedlać reakcję na zmianę stosunku cen i zaniedbywać skutki zmiany siły nabywczej, i efekt dochodowy wynikający ze zmiany siły nabywczej dochodu. Efekt substytucyjny, to w każdym wypadku zmiana popytu spowodowana zmianą ceny skompensowaną taką zmianą dochodu, aby nie zmieniła się siła nabywcza dochodu, a efekt dochodowy to różnica zmiany popytu i efektu substytucyjnego. Niejednoznaczność wynika z niejasnej interpretacji terminu "siła nabywcza": równanie Hicksa gwaranuje, że nie zmienia się sytuacja konsumenta (jest tak samo dobra), a równanie Sluckiego jedynie że uprzednio wybrany koszyk znajduje się nadal na ograniczeniu budżetowym konsumenta (na skutek dodania lub odjęcia "na papierze" dochodu). Oczywiście efekty Słuckiego łatwiej wyliczyć – nie musimy odwoływać się do nieobserwowalnej funkcji popytu Hicksa.

Podobnie jak w przypadku ciągłego równania Słuckiego, efekty substytucyjne są zawsze ujemne, a znak efektu dochodowego zależy od tego, czy dobro jest normalne czy podrzędne.

**Rysunek 5.6**

**Rysunek 5.7**

**Przykład 5.34.** *Skomentować uwagę pewnego ekonomisty "w krajach biedniejszych elastyczność popytu na żywność jest mniejsza, ponieważ gospodarstwa domowe przeznaczają większą część swoich dochodów na żywność niż w państwach bogatszych".*

*Uwaga!: chodzi o wartość bezwzględną elastyczności (podobnie jak w przypadku np. krańcowej stopy substytucji, jeśli jakaś wielkość jest zawsze ujemna, to w porównaniach ekonomiści często zaniedbują znak, nie mówiąc o tym, bo "i tak wszyscy wiedzą o co chodzi").*

*Jest to wniosek z równania Słuckiego:* $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p},v(\mathbf{p},m))}{\partial p_i} - \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m} x_i(\mathbf{p},m)$.

$\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i(\mathbf{p},m)} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p},v(\mathbf{p},m))}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i(\mathbf{p},m)} - \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m} \cdot \frac{p_i}{x_i(\mathbf{p},m)} \cdot x_i(\mathbf{p},m)$

$\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i(\mathbf{p},m)} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p},v(\mathbf{p},m))}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{h_i(\mathbf{p},v(\mathbf{p},m))} - \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_i(\mathbf{p},m)} \cdot \frac{p_i}{m} \cdot x_i(\mathbf{p},m)$, *czyli*

$\varepsilon_i = \varepsilon_i^H - \varepsilon_i^D \cdot S_i$, *gdzie* $S_i$ *oznacza część dochodu wydawaną na żywność. Żywność jest dobrem normalnym, więc* $\varepsilon_i^D > 0$, *a elastyczność Hicksa* $\varepsilon_i^H$ *jest zawsze ujemna. Jeśli założymy, że elastyczność Hicksa i elastyczność dochodowa nie zmieniają się, to ze wzrostem* $S_i$ *będzie wzrastać wartość bezwzględna* $\varepsilon_i$. *Przy tych założeniach dochodzimy więc do zupełnie przeciwnego wniosku.*

**Zastosowanie równania Słuckiego do szerszej klasy zagadnień podejmowania decyzji przez konsumenta.** W dotychczasowych rozważaniach nie braliśmy pod uwagę, skąd się bierze dochód. O ile nie miało to znaczenia przy podejmowaniu decyzji w konkretnych sytuacjach, o tyle jest to istotne, kiedy badamy efekty zmian cen. Co jeśli nasz dochód zależy od cen? W jakich rzeczywistych sytuacjach to ma miejsce?

Konsument może posiadać pewien koszyk, tzw. *zasób początkowy* (jako dodatkową współrzędną możemy rozważyć posiadany pieniądz, którego cena stale równa się 1, dzięki czemu uzyskujemy rozszerzenie zwykłej optymalizacji konsumenta). Wówczas konsument może wymienić część dóbr na inne, przy czym stosunek wymiany wynika z różnicy cen lub sprzedać część dóbr, by za uzyskane środki zakupić inne dobra. Jak zauważymy później, do tej klasy zagadnień należy wybór długości czasu pracy (zagadnienie podaży pracy), a także wielkość oszczędności w banku (wybór międzyokresowy).

**Zasób początkowy: kupowanie i sprzedawanie:.** Przyjmujemy, że mój dochód to nie określona z góry suma pieniędzy w gotówce, lecz pewien koszyk produktów $\omega$ – *zasób początkowy.* Mogę sprzedać część dóbr, by zakupić za uzyskane pieniądze inne dobra, tak by zmaksymalizować użyteczność. W pierwszej chwili to zagadnienie wydaje się zupełnie różne od zagadnienia "zwykłej" optymalizacji konsumenta.

Aby sprowadzić nasze zagadnienie do tejże postaci, sformułujemy je nieco inaczej: mogę sprzedać zasób początkowy po cenach rynkowych, wówczas uzyskam dochód $m = \mathbf{p}^T\omega$. Za ten dochód mogę zakupić nowy koszyk produktów $x$ (w szczególności nic nie stoi na przeszkodzie, by był to ten sam koszyk, czyli abym *netto* nie był *sprzedawcą* ani *nabywcą* żadnego z dóbr), tak by zmaksymalizować użyteczność. Jeśli $x_i > \omega_i$, to jestem nabywcą netto dobra $i$: w rzeczywistości zakupiłem $x_i - \omega_i$, jeśli natomiast $x_i < \omega_i$, to jestem sprzedawcą netto dobra $i$: w rzeczywistości sprzedałem $\omega_i - x_i$. Ograniczenie budżetowe ma postać $\mathbf{p}^T x = \mathbf{p}^T\omega$, a zbiór budżetowy $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{p}^T x \leq \mathbf{p}^T\omega\}$. Zauważmy, że, ponieważ nie ma żadnych kosztów transakcji, takie podejście jest równoważne wyjściowemu problemowi

Nasz popyt to $x(\mathbf{p}, \mathbf{p}^T\omega)$. Jeżeli chcemy badać efekt zmiany ceny dóbr, musimy pamiętać, że występuje ona w obu argumentach $x$.

Całkowita zmiana popytu na dobro $i$ spowodowana zmianą ceny dobra $j$ jest więc równa:
$\frac{dx_i(\mathbf{p},\mathbf{p}^T\omega)}{dp_j} = \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial p_j}\Big|_{m=\mathbf{p}^T\omega} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m}\Big|_{m=\mathbf{p}^T\omega} \frac{\partial \mathbf{p}^T\omega}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial p_j}\Big|_{m=\mathbf{p}^T\omega} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m}\Big|_{m=\mathbf{p}^T\omega} \omega_j.$

Korzystając ze "zwykłego" ciągłego równania Słuckiego, otrzymujemy więc
$\frac{dx_i(\mathbf{p},\mathbf{p}^T\omega)}{dp_j} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p},v(\mathbf{p},m))}{\partial p_j}\Big|_{m=\mathbf{p}^T\omega} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m}\Big|_{m=\mathbf{p}^T\omega} (\omega_j - x_j(\mathbf{p}, m))$ – równanie Słuckiego dla naszego zagadnienia.

Efekt substytucyjny nie zmienia się, natomiast drugi z efektów to *efekt majątkowy.* Jego znak, oprócz tego, czy dobro jest normalne, czy podrzędne, zależy też od tego, czy jestem sprzedawcą czy nabywcą netto dobra, którego cena uległa zmianie.

Warto zwrócić uwagę na jeszcze jedną rzecz: równoczesne przemnożenie cen wszystkich produktów przez tę samą liczbę dodatnią nie zmienia zagadnienia. Stąd jeśli rozważamy model z dwoma dobrami, łatwo nam badać wpływ na popyt na dobro zmiany ceny drugiego dobra: podwyżka ceny drugiego dobra jest równoważna obniżce ceny pierwszego, a więc nie musimy korzystać z "krzyżowych" efektów substytucyjnych $\frac{\partial h_i}{\partial p_j}$, których znak jest trudny do określenia.

Zobaczmy, korzystając z równania Słuckiego, jak zmieni się popyt na dobro $i$, jeśli zmianie uległa tylko cena $p_i$ – wzrosła:

Jeśli $i$ jest dobrem normalnym, to nabywca netto dobra $i$ zmniejszy jego konsumpcję (będzie kupował mniej, a nawet stanie się sprzedawcą netto), natomiast nic nie można powiedzieć o sprzedawcy netto; a jeśli $i$ jest dobrem podrzędnym, to na odwrót.

**Podaż pracy.** Choć na pierwszy rzut oka nie widać związku, wybór, ile godzin będę pracował (a co za tym idzie – ile zarobię), a ile godzin odpoczywał, jest przykładem zagadnienia wyboru przy dochodzie w postaci zasobu początkowego.

Najpierw zauważmy, że praca raczej nie jest "dobrem" w rozumieniu ekonomicznych. Co najwyżej pieniądze, które za nią otrzymujemy, albo status społeczny, poczucie bezpieczeństwa... Na pewno większa liczba przepracowanych godzin nie zwiększa naszej użyteczności, przeciwnie: zmniejsza ją. Jeżeli weźmiemy pod uwagę przeciwieństwo pracy – odpoczynek – będzie to już dobro. Przyjmujemy, że odpoczynek jest dobrem normalnym.

W okresie, na jaki podejmujemy decyzję (doba, tydzień, miesiąc...) istnieje maksymalna liczba godzin, którą możemy podzielić na pracę i odpoczynek. Nie musi to być 24 godziny na dobę, może to być liczba mniejsza określająca, ile jesteśmy w stanie pracować. Oznaczmy tę liczbę przez $\bar{L}$. Jeżeli pracę oznaczamy przez $L$, to odpoczynek będzie wynosił $R = \bar{L} - L$. Stawka płacy wynosi $w$, będzie to zatem cena odpoczynku. W modelu mamy jeszcze drugie dobro: konsumpcję $C$, liczoną w pieniądzu, o cenie 1.

W najprostszym przykładzie nie dysponujemy żadnym dochodem pozapłacowym, czyli $\omega_2 = 0$, a $\omega_1 = \bar{L}$. Dysponujemy jedynie odpoczynkiem w ilości $\bar{L}$, który sprzedajemy, by za uzyskany dochód kupić konsumpcję i odpoczynek, co daje ograniczenie budżetowe $C + wR = w\bar{L}$ – jest to przekształcone wyliczenie wypłaty za pracę. (Uwaga: jeśli rozważamy inną płacę za nadgodziny niż za normowany czas pracy, podatki od pewnego poziomu dochodu i tym podobne, wówczas ograniczenie budżetowe będzie łamaną, a cena odpoczynku będzie się zmieniać).

Równanie Słuckiego dla czasu wolnego będzie miało postać:
$\frac{dx_1([w,1]^T,w\bar{L})}{dw} = \frac{\partial h_1([w,1]^T,v([w,1]^T,w\bar{L}))}{\partial w} + \frac{\partial x_1([w,1]^T,w\bar{L})}{\partial m}(\bar{L} - x_1([w,1]^T, w\bar{L}))$.

Mamy do czynienia z dwoma przeciwstawnymi efektami: ujemnym substytucyjnym i dodatnim majątkowym, więc nie można powiedzieć, który z nich przeważy. Możliwe jest zarówno, że ze wzrostem stawki płacy będziemy więcej pracować (mniej odpoczywać) ze względu na to że odpoczynek stanie się relatywnie droższy, jak i że będziemy mniej pracować (więcej odpoczywać), bo będziemy mogli sobie na to pozwolić. Zazwyczaj ekonomiści uważają, że przy wysokich stawkach mamy do czynienia z tą drugą sytuacją. Dlatego, by motywować pracowników do dłuższej pracy, wprowadza się wyższą stawkę za nadgodziny.

**Wybór międzyokresowy.** W najprostszym ujęciu mamy dwa okresy (chociaż może być ich więcej), dla uproszczenia będziemy nazywać je "dziś" i "jutro"; i oznaczać przez 0 i 1.

W okresie $i$ mam dochód deterministyczny $Y_i$ i wybieram poziom konsumpcji $C_i$. Konsumpcje w obu okresach są dobrami normalnymi. Swój dochód pomiędzy okresami mogę przenosić korzystając z banku przy stopie procentowej $r$: mogę *oszczędzać*

– konsumować mniej niż zarabiam w dziś, bądź *zadłużać się* – wziąć pożyczkę pod zastaw przyszłego dochodu, czyli konsumować dziś więcej niż zarabiam. W zagadnieniu wyboru międzyokresowego zakładamy, że nie można wziąć pożyczki, której się nie spłaci oraz, dla uproszczenia, że stopa procentowa jest jednakowa dla kredytów i lokat tzn. nie ma marży.

Ograniczne budżetowe, jak we wszystkich zagadnieniach dochodu w postaci zasobu początkowego, może mieć nieskończenie wiele równoważnych postaci, jednak w przypadku zagadnienia wyboru międzyokresowego dwie z nich mają interpretację:

$(1+r)C_0 + C_1 = (1+r)Y_0 + Y_1$ – w terminach *wartości przyszłej*: wartość przyszła strumienia konsumpcji jest równa wartości przyszłej strumienia dochodów – tyle byśmy mieli jutro, gdybyśmy odłożyli do banku;

$C_0 + \frac{1}{1+r}C_1 = Y_0 + \frac{1}{1+r}Y_1$ – w terminach *wartości obecnej*: wartość obecna strumienia konsumpcji jest równa wartości obecnej strumienia dochodów – tyle pieniędzy moglibyśmy uzyskać dziś pod zastaw naszych dochodów.

Zasób początkowy to $Y_0$ i $Y_1$.

Jeżeli badamy wpływ wzrostu stopy procentowej na konsumpcję dziś i jutro, wygodnie jest użyć ograniczenia budżetowego w terminach wartości przyszłej dla $C_0$ (wówczas cena $p_0 = 1+r$, $p_1 = 1$) i wartości obecnej dla $C_1$ ($p_0 = 1$, $p_1 = \frac{1}{1+r}$) i skorzystać z równania Słuckiego dla zmiany ceny tego samego dobra: $\frac{dx_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}^T\omega)}{dp_i} = \left.\frac{\partial h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m))}{\partial p_i}\right|_{m=\mathbf{p}^T\omega} + \left.\frac{\partial x_i(\mathbf{p}, m)}{\partial m}\right|_{m=\mathbf{p}^T\omega}(\omega_i - x_i(\mathbf{p}, m))$.

Ponieważ $\operatorname{sign}\left(\frac{dC_0(r)}{dr}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{dx_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}^T\omega)}{dp_0}\right)$ i $\operatorname{sign}\left(\frac{dC_1(r)}{dr}\right) = -\operatorname{sign}\left(\frac{dx_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}^T\omega)}{dp_1}\right)$, a konsumpcje w obu okresach są normalne, to pożyczkodawca (ten, kto oszczędza) będzie konsumował jutro więcej, natomiast nie wiadomo, jak będzie z jego konsumpcję dziś; pożyczkobiorca będzie konsumował dziś mniej, natomiast nie wiadomo, co będzie z jego konsumpcją jutro – może zacząć oszczędzać, przez co ją zwiększy, a może zmniejszyć, jeśli pożycza więcej, aby za bardzo nie zmniejszyć konsumpcji dziś.

**Statyka porównawcza – przykłady.**

**Przykład 5.35.** *Podniesiono cenę żywności z $p$ do $p + \Delta p$. Emeryci i renciści przeznaczają około 40% swoich dochodów na żywność. O ile powinniśmy podnieść ich dochody, aby mieć pewność, że ich sytuacja nie pogorszy się. Czy należy się spodziewać, że ich sytuacja poprawi się?*

Jeśli nie wiemy nic o użyteczności, musimy zwiększyć dochód o tyle, aby uprzednio wybierany koszyk był na nowym ograniczeniu budżetowym, czyli o $\Delta m = 0.4 \cdot m \cdot \Delta p$. Wówczas użyteczność na pewno nie zmniejszy się, a jeśli konsumenci wybiorą inny koszyk, wówczas się zwiększy. Z tą drugą sytuacją będziemy mieć zawsze do czynienia, jeśli funkcja użyteczności jest różniczkowalna.

**Przykład 5.36.** ***Rysunek 5.8***

**Przykład 5.37.** *W ramach akcji marketingowej PKP postanowiły wprowadzić roczne karty podróżne dla studentów, które upoważniają do zniżki przy zakupie wszystkich biletów. Czy jeśli student kupi taką kartę, to będzie więcej korzystał z usług PKP? Czy student, któremu wszystko jedno, czy kupić kartę czy nie, będzie więcej wydawał na kolej, jeśli ją wykupi?*

Odpowiedź na pierwsze pytanie brzmi "nie", a na drugie "tak".

Załóżmy, że podróże koleją są dla studenta dobrem normalnym (przy jego poziomie dochodu samolot czy taksówka na długą trasę raczej rzadko wchodzi w grę). Efekt substytucyjny jest dodatni, efekt dochodowy też, ale dochód się zmniejsza przez to, że student musi wykupić kartę, więc teoretycznie może się zdarzyć, że będzie jeździł mniej.

Odpowiedź na drugie pytanie brzmi "tak", ponieważ "jest mu wszystko jedno" oznacza, że ta sama krzywa obojętności jest styczna do obu ograniczeń budżetowych, więc może być styczna do ograniczenia budżetowego odpowiadającego wykupowi karty tylko w jego fragmencie, który dotychczas nie był dostępny, co oznacza zwiększenie przejazdów koleją.

**Przykład 5.38.** ***Rysunek 5.9***

**Przykład 5.39.** *W pewnym zakładzie stawki płac wynoszą* 5 *zł za godzinę, tydzień roboczy ma pięć dni po osiem godzin. Każdy pracownik może brać nadgodziny, płatne* 7.5 *zł za godzinę, jednak nie więcej niż* 20 *tygodniowo. Przeciętny pracownik bierze* 10 *nadgodzin tygodniowo. Zakład pracy płaci składki ZUS w wysokości* 10 *zł tygodniowo na pracownika. Związek zawodowy proponuje zrównać stawki płacy zasadniczej i za nadgodziny na poziomie* 5.5 *zł. Przeanalizować tę propozycję.*

Zakładamy, że zakład pracy chce utrzymać podaż pracy pracowników na tym samym poziomie co przed zmianą. Chociaż przy tym samym poziomie nadgodzin co poprzednio, przeciętny pracownik otrzymywałby taką samą wypłatę, należy oczekiwać, że jego podaż pracy zmniejszy się (zwiększy się popyt na odpoczynek), gdyż mamy tu do czynienia jedynie z efektem substytucyjnym, dodatnim w przypadku odpoczynku, którego cena relatywnie obniży się (jeśli pracujemy powyżej 40 godzin).

Aby utrzymać ten sam poziom podaży pracy, trzeba byłoby zatrudnić nowych pracowników, którzy wypracowaliby brakujące godziny. To jednak zwiększy koszty – za każdego nowego pracownika trzeba dodatkowo zapłacić ZUS.

**Przykład 5.40.** ***Rysunek 5.10***

**5.6. Od funkcji popytu do preferencji.** Jak odtworzyć relację preferencji, jeżeli mamy dane mamy jedynie to, co można uzyskać z badań rynku: funkcję popytu.

Można to robić "na raty" albo bezpośrednio.

Wiemy, że przy założeniach o regularności, jeżeli mamy jedną z funkcji $v$ lub $e$, to można z nich odtworzyć pozostałe funkcje modelu konsumenta. Mając funkcję $v$ lub $e$, przy pewnych założeniach o regularności łatwo uzyskamy również funkcję użyteczności odzwierciedlającą wyjściowe preferencje.

**Stwierdzenie 5.41.** *Przy standartowych założeniach modelu konsumenta i jeżeli funkcja $u$ jest wklęsła:*

*a) jeżeli $v$ jest niejawną funkcją użyteczności, to dla każdego $x$ zachodzi równość $u(x) = \min_{\mathbf{p}:\mathbf{p}^T x=1} v(\mathbf{p}, 1)$;*

*b) Zbiory niegorsze niż $u$ spełniają $\{x : u(x) \geq u\} = \bigcap_{\mathbf{p}>>0} \left\{x : \mathbf{p}^T x \geq e(\mathbf{p}, u)\right\}$ a krzywe obojętności $u$ $\{x : u(x) = u\} = \bigcap_{\mathbf{p}>>0} \left\{x : \mathbf{p}^T x \geq e(\mathbf{p}, u)\right\} \setminus \bigcap_{v>u} \bigcap_{\mathbf{p}>>0} \left\{x : \mathbf{p}^T x \geq e(\mathbf{p}, v)\right\}$*

Tak więc wystarczy wystarczy znaleźć pewną funkcję $v$ lub $e$, aby znaleźć funkcję użyteczności. Jak jednak uzyskać jedną z tych funkcji, mając daną jedynie funkcję $x$?

Z lematu Shepharda $\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p}, u) = x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))$.

Stąd funkcja wydatków jako funkcja cen przy ustalonym poziomie użyteczności $u_0$ opisana jest układem równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu:
$\frac{\partial e(\mathbf{p},u_0)}{\partial p_i} = x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0))$ dla $i = 1, \ldots, n$
z warunkiem początkowym $e(\mathbf{p}_0, u_0) = m_0$ (czyli $m_0$ takie, że $u(x(\mathbf{p}, m_0)) = u_0$ – musimy przypisać jakiś poziom użyteczności wyjściowemu popytowi).

W przypadku dwóch dóbr, korzystając z jednorodności stopnia 1 funkcji $e$ układ można zredukować do jednego równania zwyczajnego:
$\frac{\partial e([p_1,1]^T,u_0)}{\partial p_1} = x_1([p_1, 1]^T, e([p_1, 1]^T, u_0))$,
czyli, w uproszczonej postaci:
$\frac{d\widetilde{e}(p_1)}{dp_1} = x_1([p_1, 1]^T, \widetilde{e}(p_1))$
z warunkiem początkowym $\widetilde{e}(p_1^0) = m_0$.

Rozwiązanie będzie miało wszystkie wymagane własności funkcji wydatków i istnieje przy dość słabych założeniach regularności funkcji $x$.

Jeżeli dóbr jest więcej niż 2, to problemu nie da się zredukować do równania różniczkowego zwyczajnego. Warunek konieczny istnienia funkcji $e$ dwukrotnie różniczkowalnej jako funkcja cen jest oczywisty: macierz substytucji musi być symetryczna: $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial pj} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},m)}{\partial m} x_j(\mathbf{p}, m) = \frac{\partial x_j(\mathbf{p},m)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(\mathbf{p},m)}{\partial m} x_i(\mathbf{p}, m)$ dla każdego $i, j$. Jest to równocześnie warunek dostateczny (warunki całkowalności). Rozwiązanie ma własności $e$ i macierz drugiej pochodnej jest równa macierzy substytucji.

To kończy procedurę postępowania w przypadku gdy mamy regularną funkcję popytu. Jeżeli $x$ nie jest różniczkowalna, pozostaje nam metoda bezpośrednia – konstrukcja relacji preferencji przy użyciu ujawnionych preferencji. Ponieważ wiemy, że relacja preferencji jest racjonalna, musimy rozszerzyć definicję ujawnionej preferencji o informacje, które możemy wyciągnąć z przechodniości. Wówczas uzyskamy relację pośredniej ujawnionej preferencji.

**Definicja 5.42.** *Mówimy, że koszyk* $x$ jest pośrednio jawnie ściśle preferowany przed $y$, *jeśli istnieje liczba naturalna* $N$ *i ciąg par* $(\mathbf{p}^i, m^i)$, *taki że* $x(\mathbf{p}^i, m^i) \neq x(\mathbf{p}^{i+1}, m^{i+1})$ $(\mathbf{p}^i)^T x(\mathbf{p}^{i+1}, m^{i+1}) \leq m^i$ *dla* $i = 1, \ldots, N-1$, $x = x(\mathbf{p}^1, m^1)$ *i* $y = x\left(\mathbf{p}^N, m^N\right)$

Relacja pośredniej jawnej preferencji jest domknięciem zwykłej (używa się też dla porównania słowa *bezpośredniej*) jawnej preferencji ze względu na przechodniość.

Mocny aksjomat ujawnionych preferencji mówi, że jeżeli $x$ jest pośrednio jawnie preferowany przed $y$, to $y$ nie może być bezpośrednio jawnie preferowany przed $x$.

**Definicja 5.43.** Mocny (silny) aksjomat ujawnionych preferencji

*Funkcja popytu spełnia* mocny aksjomat ujawnionych preferencji, *że dla dowolnych koszyków* $x$ *i* $y$, *jeśli* $x$ *jest pośrednio ściśle jawnie preferowany przed* $y$ *to* $\left(\mathbf{p}^N\right)^T x > m^N$ *(gdzie* $y = x\left(\mathbf{p}^N, m^N\right)$*).*

**Stwierdzenie 5.44.** *Jeżeli funkcja popytu Walrasa* $x$ *spełnia mocny aksjomat ujawnionych preferencji, to istnieje racjonalna relacja preferencji racjonalizująca* $x$, *taka że* $\forall y \in B_{\mathbf{p},m}, y \neq x(\mathbf{p}, m)$ *koszyk* $x(\mathbf{p}, m)$ *jest lepszy od* $y$.

## 6. Teoria wyboru producenta

Teraz zajmiemy się stroną podażową gospodarki, czyli odpowiemy na pytanie, skąd biorą się konsumowane przez nas dobra.

Znów będziemy mieć do czynienia z podejmowaniem decyzji. Tym razem podejmującego decyzję będziemy nazywać *producentem* albo *firmą*. Będziemy przez to rozumieć dowolną jednostkę zajmującą się produkcją, tzn. zużywającą pewne dobra, by uzyskać inne. Nie interesuje nas struktura wewnętrzna firmy, czy właściwości zarządzania, ani nawet to, czy ma jakąkolwiek formę prawną. Dzięki temu możemy przejść od razu do analizy zachowań rynkowych. Zaczniemy od tego, z czego wybiera firma, czyli jakimi technologiami dysponuje.

**6.1. Technologia.** Zakładamy, że mamy w sumie $n$ dóbr. *Plan* albo inaczej *proces produkcyjny* to dowolny wektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Jeżeli dla procesu produkcyjnego $\mathbf{y}$ jego $i$-ta współrzędna $y_i$ jest ujemna, to dobro $i$ jest *czynnikiem produkcji*, natomiast jeśli jest dodatnia, to $i$ jest *produktem*. Zbiór osiągalnych (fizycznie, prawnie, etc.) planów produkcyjnych będziemy oznaczać przez $\mathbb{Y}$ – *zbiór produkcyjny*.

**Przykład 6.1.** *Jajecznica z pięciu jaj. Przepis kulinarny jako plan produkcyjny.*

*Aby usmażyć jedną porcję jajecznicy z pięciu jaj, potrzeba zużyć: pięć jaj, 2g tłuszczu, 1 szczyptę soli, 0.01 m*$^3$ *gazu, 15 minut pracy kucharza, 10 minut dzierżawy patelni; nie dodawać cukru.*

*Formalnie, proces produkcyjny zapiszemy jako* $[-5, -2, -1, -0.01, -15, -10, 0, +1]^T$, *jeśli współrzędne oznaczają kolejno składniki wymienione w przepisie w odpowiednich jednostkach, a ostatnia jajecznicę.*

W celach obliczeniowych wygodnie jest zapisać zbiór produkcyjny przy pomocy funkcji:

**Definicja 6.2.** *Funkcję* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *nazywamy* funkcją transformacji, *jeśli* $\mathbb{Y} = \{y : F(y) \leq 0\}$ *i* $F(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \operatorname{Bd} \mathbb{Y}$. *Zbiór* $\{y : F(y) = 0\}$ *nazywamy wówczas* granicą transformacji.

**Przypadek szczególny**

Szczególnie interesować będzie nas sytuacja, z którą przeważnie mamy do czynienia w rzeczywistości: kiedy mamy tylko jeden, ustalony produkt i funkcja transformacji ma szczególną postać: jest różnicą pewnej funkcji od nakładów czynników produkcji i wielkości produktu. Dla wyróżnienia produkt będzie zawsze na ostatniej współrzędnej.

Tak więc $\mathbb{Y} = \Big\{[-z_1, -z_2, \ldots, -z_{n-1}, y]^T : y \leq f(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}), z_i \geq 0\Big\}$. Tę sytuację będziemy określać jako *przypadek szczególny*.

Zauważmy, że rzeczywiście jest to przypadek szczególny szerszego modelu z funkcją transformacji $F$, w naszym przypadku możemy np. wziąć $F(\mathbf{y}) = \max(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n - f(-y_1, \dots, -y_{n-1}))$.

**Definicja 6.3.** *Funkcję* $f : \mathbb{R}_+^{n-1} \to \mathbb{R}$ *nazywamy* funkcją produkcji, *jeśli* $\mathbb{Y} = \Big\{[-z_1, -z_2, \dots, -z_{n-1}, y]^T : y \leq f(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}), z_i \geq 0\Big\}$.

*Poziomice funkcji* $f$ *nazywamy* izokwantami *albo* krzywymi jednakowego produktu.

*Krańcową stopą substytucji technicznej czynnika* $l$ *przez czynnik* $k$ *nazywamy funkcję* $MRTS_{l,k} : \mathbb{R}_+^{n-1} \to \mathbb{R}$ *taką że* $MRTS_{l,k}(\mathbf{z}) = -\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z_l}}{\frac{\partial f(z)}{\partial z_k}}$.

*Funkcję* $\frac{\partial f(z)}{\partial z_l}$ *nazywamy krańcowym produktem czynnika* $i$ *(oznaczane przeważnie przez* $MP_i$*).*

Jeżeli krańcowa stopa substytucji technicznej jest dobrze określona, to jest miarą nachylenia izokwanty. Ekonomiczna łopatologiczna interpretacja to "o ile trzeba zmienić nakłady czynnika $k$, aby przy zwiększeniu nakładów czynnika $l$ o jednostkę pozostać na tej samej izokwancie". Tu również, podobnie jak dla krańcowej stopy substytucji w modelu konsumenta, niektóre podręczniki mogą używać przeciwnego znaku w definicji.

Wracamy do ogólnego modelu.

Będziemy rozważać następujące własności zbioru produkcyjnego:

**1**. $\mathbb{Y} \neq \emptyset$;

**2**. $\mathbb{Y}$ jest domknięty;

**3**. *możliwość marnotrawstwa* (po angielsku eufemistycznie "free disposal"): jeżeli $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$ to dla $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}$ mamy $\mathbf{y}' \in \mathbb{Y}$ – zawsze można zużyć więcej czynników albo uzyskać mniejszy produkt.

Warunki 1-3 są minimalnymi założeniami w modelu producenta i zawsze będziemy je przyjmować.

Przy tych założeniach można udowodnić np. własność, że $\mathbf{y} \in \operatorname{Bd} \mathbb{Y} \Leftrightarrow \mathbf{y}$ jest efektywny, to znaczy, że nie istnieje $\mathbf{y}' \in \mathbb{Y}$ dla którego $\mathbf{y} \leq \mathbf{y}'$ z nierównością ostrą przynajmniej na jednej współrzędnej.

Dalsze założenia to

**4**. "*no free lunch*" – "nie ma czegoś takiego jak obiadek za darmo": $\mathbb{Y} \cap \mathbb{R}_+^n \subset \{\mathbf{0}\}$, w finansach używa się nazwy "brak arbitrażu";

**5**. *możliwość nic nie robienia*: $\mathbf{0} \in \mathbb{Y}$ – nie zawarliśmy żadnego kontraktu, który nakazywałby nam coś robić (mała uwaga – później będziemy nazywać taką sytuację *długim okresem* dla producenta);

**6**. *nieodwracalność procesów produkcyjnych*: $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$ i $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, to $-\mathbf{y} \notin \mathbb{Y}$ - z jajecznicy z pieciu jaj nie można odzyskać pięciu jaj; dwóch gram tłuszczu itd.

Założenia 1-6 przymujemy standartowo w modelu producenta.

Dodatkowo możemy jeszcze rozważać

**7**. *addytywność* – jeśli $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$ i $\mathbf{y}' \in \mathbb{Y}$, to $\mathbf{y} + \mathbf{y}' \in \mathbb{Y}$ – można postawić dwie fabryki – interesuje nas produkcja łączna;

**8**. *wypukłość* – $\mathbb{Y}$ jest wypukły.

Ponadto często ma zastosowanie jedna z własności:

**9**. *nierosnące przychody skali* – dla każdego $t \in (0, 1)$ jeśli $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$, to $t \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Y}$;

**10**. *niemalejące przychody skali* – dla każdego $t > 1$ jeśli $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$, to $t \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Y}$;

**11**. *stałe przychody skali* – dla każdego $t > 0$ jeśli $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$, to $t \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Y}$ – spełnione są własności 9. i 10.; wówczas $\mathbb{Y}$ jest stożkiem.

Zauważmy, że z tego, że $\mathbf{0} \in \mathbb{Y}$ wynika, że wypukłość $\mathbb{Y}$ implikuje nierosnące przychody skali.

W naszym **przypadku szczególnym**, kiedy mamy tylko jeden produkt i funkcję produkcji $f$, wypukłość $\mathbb{Y}$ oznacza wklęsłość funkcji $f$, natomiast warunki 9 – 10 mają postać:

**9'**. *nierosnące przychody skali* – dla każdego $t \in (0, 1)$, $z \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ zachodzi nierówność $f(t \cdot z) \geq t \cdot f(z)$ (równoważnie: dla każdego $t > 1$, $z \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ zachodzi $f(t \cdot z) \leq t \cdot f(z)$);

**10'**. *niemalejące przychody skali* – dla każdego $t > 1$, $z \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ zachodzi nierówność $f(t \cdot z) \geq t \cdot f(z)$;

**11'**. *stałe przychody skali* – dla każdego $t > 0$, $z \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ zachodzi $f(t \cdot z) = t \cdot f(z)$;

Dodatkowo możemy zdefiniować *malejące przychody skali* – dla każdego $t \in (0, 1)$, $z \in \mathbb{R}_+^{n-1}, z \neq \mathbf{0}$ zachodzi $f(t \cdot z) > t \cdot f(z)$ (równoważnie: dla każdego $t > 1$, $z \in \mathbb{R}_+^{n-1}, z \neq \mathbf{0}$ zachodzi $f(t \cdot z) < t \cdot f(z)$) i *rosnące przychody skali* – dla każdego $t > 1$, $z \in \mathbb{R}_+^{n-1}, z \neq \mathbf{0}$ zachodzi $f(t \cdot z) > t \cdot f(z)$.

Chociaż w przepisie na jajecznicę z pięciu jaj mieliśmy wiele różnych czynników produkcji, obecnie w analizach działalności produkcyjnej ograniczamy się przeważnie do dwóch: *pracy* – pierwszego historycznie czynnika produkcji i *kapitału* (do którego wliczamy zarówno jajka jak i patelnię: wszystkie produkty, które możemy kupić albo wydzierżawić – przeliczone na pieniądz). W przeszłości był jeszcze jeden istotny czynnik produkcji – *ziemia*. Obecnie pojawiają się nowe czynniki, które dotychczas były zaniedbywane, takie jak na przykład *informacja*, ale nie weszły one jeszcze do standartowego kanonu mikroekonomii.

Teraz przejdziemy do tego, co jest celem producenta.

**6.2. Maksymalizacja zysku.** Celem producenta jest *maksymalizacja zysku*, które to pojęcie objaśnimy poniżej.

Podobnie jak w teorii wyboru konsumenta, producent funkcjonuje na rynku, który określa ceny wszystkich dóbr – zarówno czynników produkcji jak i produktów. Podobnie jak konsument, producent jest "*price taker*" – "biorcą cen", czyli traktuje ceny jako dane. O takiej firmie mówi się *firma konkurencyjna*. Tak więc należy się spodziewać, że model producenta będzie dobrze opisywał producenta gwoździ z ul. Grzybowskiej, a nie IBM.

Zakładamy, że wszystkie ceny są ściśle dodatnie. Gdyby cena produktu była zerowa, nie opłacałoby się go w ogóle produkować, gdyby natomiast cena któregoś z czynników była zerowa, moglibyśmy go zużywać nadmiernie (marnotrawić, na co pozwala nam założenie o możliwości marnotrawstwa), gdyż nic by to nas nie kosztowało. Tak jest z powietrzem – ponieważ nic nie kosztuje, możemy go zużywać w procesie produkcyjnym ile chcemy (np. zanieczyszczać), więc tak naprawdę nie bierzemy go pod uwagę w opisie technologii. Powstają tak zwane *efekty zewnętrzne* – ktoś traci na naszym nadmiernym zanieczyszczaniu, więc pojawia się presja, by zmusić nas do płacenia za te szkody – np. państwo wprowadzi opłatę za emisję zanieczyszczeń, przez co dotychczas bezpłatny czynnik uzyska cenę niezerową. Tak więc w końcu wszystkie ceny są dodatnie.

Mamy więc wektor cen $\mathbf{p} \in \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+$. W naszym szczególnym przypadku rozróżniamy wektor cen czynników (historycznie przyjęło się go oznaczać przez $\mathbf{w}$) i cenę produktu (historycznie $p$). Dla typowych czynników ich ceny to: dla pracy - płaca, dla kapitału – odsetki, dla ziemi – tzw. renta gruntowa.

Wróćmy do ogólnego modelu. Przy cenach $\mathbf{p}$ dla procesu produkcyjnego $\mathbf{y}$ nasz *zysk* równa się $\mathbf{p}^T\mathbf{y}$.

Celem firmy jest *maksymalizacja zysku*, więc zagadnienie optymalizacyjne producenta ma postać

$$\max_{\mathbf{y}\in\mathbb{Y}} \mathbf{p}^T\mathbf{y},$$

(przy użyciu funkcji transformacji $\max_{F(\mathbf{y})\leq 0} \mathbf{p}^T\mathbf{y}$).

Stąd mamy następujące obiekty:

**Definicja 6.4.** *Funkcję* $\Pi : \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *taką że* $\Pi(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{y}\in\mathbb{Y}} \mathbf{p}^T\mathbf{y}$ *nazywamy* funkcją zysku, *a odwzorowanie* $\mathbf{y} : \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+ \multimap \mathbb{Y}$, *takie że* $\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \operatorname{Argmax}_{\mathbf{y}\in\mathbb{Y}} \mathbf{p}^T\mathbf{y}$ – ogólnym odwzorowaniem podaży.

Jeżeli funkcja transformacji jest wystarczająco regularna, można skorzystać z mnożników Lagrange'a: ponieważ maksymalizowana funkcja jest liniowa i wszystkie współrzędne wektora $\mathbf{p}$ są dodatnie, maksimum jest przyjmowane na brzegu (o ile jest osiągalne), czyli tam, gdzie $F(\mathbf{y}) = 0$.

Warunki pierwszego rzędu będą więc miały postać $p_l = \lambda \frac{\partial F(\mathbf{y})}{\partial y_l}$, stąd $\frac{p_l}{p_k} = \frac{\frac{\partial F(\mathbf{y})}{\partial y_l}}{\frac{\partial F(\mathbf{y})}{\partial y_k}}$.

**Uwaga 6.5.** *Jeśli* $\mathbb{Y}$ *wykazuje niemalejące przychody skali, to albo* $\Pi(\mathbf{p}) = 0$ *przy czym* $\mathbf{0} \in \mathbf{y}(\mathbf{p})$*, albo* $\Pi(\mathbf{p}) = +\infty$ *i* $\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \emptyset$ *i nie da się tego znaleźć warunkami pierwszego rzędu.*

Jaka jest postać warunków pierwszego rzędu dla przypadku szczególnego, kiedy mamy jeden produkt i funkcję produkcji $f$? Wówczas $\Pi([w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, p]^T) = \max_{\mathbf{z} \geq \mathbf{0}} p \cdot f(\mathbf{z}) - \mathbf{w}^T \mathbf{z}$.

Z mnożników Kuhna-Tuckera w optymalnym $\mathbf{z}^*$ mamy $p\frac{\partial f(\mathbf{z}^*)}{\partial z_l} - w_l - (-\mu_l) = 0$ dla pewnego $\mu_l \geq 0$, przy czym jeśli $z_l^* > 0$, to $\mu_l = 0$. Stąd $p\frac{\partial f(\mathbf{z}^*)}{\partial z_l} \leq w_l$ z równością gdy $z_l^* > 0$.

To wyrażenie ma oczywiście łopatologiczną interpretację ekonomiczną: "jednostkowe zwiększenie nakładów czynnika $l$ nie zwiększy zysku, gdyż płacimy za nie co najmniej tyle samo, co zwiększamy przychód".

Teraz zajmiemy się ogólnymi własnościami zdefiniowanych obiektów.

**Stwierdzenie 6.6.** *Własności funkcji zysku*

*a) w przypadku szczególnym* $\Pi$ *jest niemalejącą funkcją* $p$*, ściśle rosnącą funkcją* $p$ *tam gdzie skończona i nierosnącą funkcją* $\mathbf{w}$*;*

*b) funkcja* $\Pi$ *jest jednorodna stopnia* $1$*;*

*c) funkcja* $\Pi$ *jest wypukła;*

*d)* $\Pi$ *jest ciągła na dowolnym zbiorze otwartym, na którym jest skończona;*

*e) Jeśli* $\mathbb{Y}$ *wypukły i "no free lunch" (założenie 4), to istnieje* $\mathbf{p}$*, dla którego* $\Pi(\mathbf{p})$ *skończone;*

*f) jeśli* $\mathbb{Y}$ *jest wypukły, to* $\mathbb{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{p}^T\mathbf{y} \leq \Pi(\mathbf{p}) \ \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_+\}$ *– dualne wyrażenie zbioru* $\mathbb{Y}$*.*

**Dowód:** Dowody a)-d) są podobne jak w stwierdzeniu 5.10.

e) Ponieważ "nie ma czegoś takiego, jak obiadek za darmo", jeśli weźmiemy dowolny punkt $a$ o wszystkich współrzędnych dodatnich np. $a = (1, \ldots, 1)^T$, to nie należy on do $\mathbb{Y}$. Z twierdzenia o hiperpłaszczyźnie rozdzielającej będzie więc istniał wektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, dla którego $\mathbf{p}^T a > \sup_{y \in \mathbb{Y}} \mathbf{p}^T \mathbf{y}$. Pozostaje pokazać, że istnieje taki $\mathbf{p}$, który może być wektorem cen, czyli, że ma wszystkie współrzędne dodatnie. Niech $p_i$ dla naszego $\mathbf{p}$ będzie ujemne. Niech $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$. Z możliwości marnotrawstwa wynika, że jeśli $y_i$ zamienimy na dowolnie małą liczbę, to tak zmodyfikowany punkt będzie należał do $\mathbb{Y}$, a więc nierówność $\mathbf{p}^T a > \sup_{y \in \mathbb{Y}} \mathbf{p}^T \mathbf{y}$ nie może być spełniona. Stąd wszystkie $p_i$ są nieujemne.

Co jeśli $p_i = 0$? Weźmy dowolnie mały $\varepsilon > 0$ i niech $\mathbf{p}^{i,\varepsilon}$ będzie równe $\mathbf{p}$ z $i$-tą współrzędną zamienioną na $\varepsilon$. Załóżmy, że żaden wektor $\mathbf{p}^{i,\varepsilon}$ nie jest hiperpłaszczyzną rozdzielającą. Niech $\mathbf{y}^\varepsilon$ oznacza punkt przecięcia hiperpłaszczyzny

$\left(\mathbf{p}^{i,\varepsilon}\right)^T a = \left(\mathbf{p}^{i,\varepsilon}\right)^T \mathbf{y}$ z brzegiem $\mathbb{Y}$. Wówczas z wypukłości $\mathbb{Y}$ i z tego, że $\mathbf{0} \in \mathbb{Y}$, możemy otrzymać pewien ciąg $\bar{\mathbf{y}}^\varepsilon$ należących do przecięcia prostych łączących punkty $\mathbf{y}^\varepsilon$, odpowiednio, z zerem i kuli domkniętej o promieniu $C\varepsilon$ (gdzie $C$ zależy od wartości pozostałych $p_i$) o środku w punkcie o $i$-tej współrzędnej 1 i wszytkich pozostałych współrzędnych 0. A to oznacza, że albo $\exists \mathbf{y} \in \mathbb{Y} \cap \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, albo $\mathbb{Y}$ nie jest domknięty.

f) Także z twierdzenia o hiperpłaszczyźnie rozdzielającej. ■

**Stwierdzenie 6.7.** *Własności ogólnego odwzorowania podaży.*

*a) jeśli* $\mathbb{Y}$ *wypukły, to* $\mathbf{y}$ *ma wypukłe wartości, a jeśli* $\mathbb{Y}$ *jest ściśle wypukły, to* $\mathbf{y}$ *jest co najwyżej jednowartościowe;*

*b) Jeśli* $\mathbf{y} \in \mathbf{y}(\mathbf{p})$ *dla pewnego* $\mathbf{p}$, *to* $\mathbf{y} \in \mathrm{Bd}\,\mathbb{Y}$ *i* $\mathbf{y}$ *jest efektywny.*

*c) Odwzorowanie* $\mathbf{y}$ *jest jednorodne stopnia* 0;

*d) Odwzorowanie* $\mathbf{y}$ *jest górnie półciągłe na dowolnym zbiorze otwartym, na którym* $\Pi$ *skończone;*

*e) Jeśli* $\mathbf{y}$ *jest funkcją różniczkowalną w* $\mathbf{p}$, *to* $D\mathbf{y}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}$.

**Dowód:** Dowody a)-d) są podobne jak w stwierdzeniu 5.9; e) wynika z jednorodności stopnia 0. ■

**Stwierdzenie 6.8.** *(**Lemat Hotellinga**) jeśli* $\mathbf{y}$ *jest jednowartościowe i różniczkowalne, osiągane dla jednoznacznie wyznaczonych* $\lambda$ *i funkcja transformacji* $F$ *jest różniczkowalna, to* $\Pi$ *jest różniczkowalna i* $\nabla\Pi = \mathbf{y}$;

**Dowód:** Z twierdzenia o obwiedni. ■

**Wniosek 6.9.** *Jeśli* $\mathbf{y}$ *jest funkcją różniczkowalną w* $\bar{\mathbf{p}}$ *to* $D\mathbf{y}(\bar{\mathbf{p}}) = D^2\Pi(\bar{\mathbf{p}})$ *jest symetryczna i nieujemnie określona.*

**Dowód:** Z lematu Hotellinga i wypukłości $\Pi$. ■

Nieujemna określoność macierzy $D^2\Pi(\bar{\mathbf{p}})$ ma znów prostą interepretację ekonomiczną – jest to tzw. prawo podaży: podaż i ceny zmieniają się "w tym samym kierunku". W przypadku, gdy drożeje tylko jeden czynnik produkcji, oznacza to, że popyt na ten czynnik maleje, a gdy drożeje tylko jeden z produktów, wówczas jego podaż rośnie.

Można też wyprowadziś analogiczne prawo podaży dla dla odzworowania $\mathbf{y}$ nie będącego funkcją różniczkowalną.

**Stwierdzenie 6.10.** *Niech* $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'$. *Dla każdego* $\mathbf{y} \in \mathbf{y}(\mathbf{p})$ *i* $\mathbf{y}' \in \mathbf{y}(\mathbf{p}')$ $(\mathbf{p} - \mathbf{p}')(\mathbf{y} - \mathbf{y}') \geq 0$ *z ostrą nierównością o ile* $\mathbf{y}(\mathbf{p}) \cap \mathbf{y}(\mathbf{p}') = \emptyset$.

**Dowód:** Podobnie jak dowód stwierdzenia 5.13. ■

**6.3. Minimalizacja kosztów.** W tym podrozdziale dla wygody skoncentrujemy się na naszym przypadku szczególnym, w którym mamy do czynienia z jednym produktem i funkcją produkcji.

Rozważmy sytuację, w której producent już ustalił, ile co najmniej musi wyprodukować (na przykład zawarł kontrakt). Jakie nakłady czynników poniesie firma maksymalizująca zysk?

Możemy też na zagadnienie, którym będziemy się teraz zajmować, spojrzeć też w inny sposób. W firmie jest dwóch specjalistów: od produkcji i od marketingu. Ten od produkcji wie, za ile najtaniej da się wyprodukować daną ilość produktu i jakie nakłady czynników trzeba zastosować. Nakłady czynników nie obchodzą specjalisty od marketingu, on chce tylko znać koszty. Tak więc musimy wyliczyć koszty dla najtańszego sposobu wyprodukowania $y$.

W tej sytuacji producent jest zainteresowany, aby za produkcję przynajmniej tej ilości zapłacić jak najmniej. Jego zagadnienie optymalizacyjne ma postać: $\min_{\substack{z\geq 0,\\ f(\mathbf{z})\geq y}} \mathbf{w}^T\mathbf{z}$.

**Definicja 6.11.** *Funkcję* $c : \operatorname{Int}\mathbb{R}_+^{n-1}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, *taką że* $c(\mathbf{w}, y) = \min_{\substack{z\geq 0,\\ f(\mathbf{z})\geq y}} \mathbf{w}^T\mathbf{z}$ *nazywamy* funkcją kosztów, *a odwzorowanie* $\mathbf{z} : \operatorname{Int}\mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}_+ \multimap \mathbb{R}_+^{n-1}$, *takie że* $\mathbf{z}(\mathbf{w}, y) = \operatorname{Argmin}_{\substack{\mathbf{z}\geq 0,\\ f(\mathbf{z})\geq y}} \mathbf{w}^T\mathbf{z}$ – odwzorowaniem warunkowego popytu na czynniki produkcji.

Funkcja kosztów $c$ określa, ile co najmniej musimy zapłacić przy cenach czynników $\mathbf{w}$, jeśli chcemy wyprodukować co najmniej $\mathbf{y}$, a odwzorowanie $\mathbf{z}$ wskazuje optymalny zestaw czynników produkcji.

**Uwaga 6.12.** *Minimalizacja kosztów jest warunkiem koniecznym maksymalizacji zysku:* $\Pi([\mathbf{w}, p]^T) = \max_{y\geq 0} p \cdot y - c(\mathbf{w}, y)$.

Jeśli przywołamy podział na specjalistę od marketingu i produkcji, i chcemy wytłumaczyć to bez użycia matematyki, to możemy inaczej to stwierdzenie sformułować jako "można bezpiecznie rozdrobnić proces decyzyjny". Jeśli specjalista od marketingu podejmie decyzję co do wielkości produkcji znając cenę i wyliczoną przez specjalistę od produkcji (bez znajomości ceny produktu) funkcję kosztów, to otrzymamy maksymalizację zysku.

Warunkiem konieczym minimalizacji kosztów przy różniczkowalnej funkcji $f$ jest: $w_l \geq \lambda\frac{\partial f(\mathbf{z}^*)}{\partial z_l}$ z równością dla $z_l^* > 0$. Jeśli $f$ jest wklęsła, to jest to też warunek dostateczny. Stąd jeśli $z_l, z_k > 0$, to $MRTS_{l,k} = -\frac{w_l}{w_k}$.

Warto zauważyć analogię zagadnienia minimalizacji kosztów i zagadnienia minimalizacji wydatków w modelu konsumenta – matematycznie jest to to samo zagadnienie. Stąd większość własności $c$ i $\mathbf{z}$ będzie przeniesieniem własności $e$ i $h$ przy niemalejącej funkcji użyteczności.

**Stwierdzenie 6.13.** *Własności* funkcji kosztów *i* odwzorowania warunkowego popytu na czynniki produkcji *mają dokładnie takie same własności jak* $e$ *i* $h$ *w modelu producenta (przenoszą się wszystkie włącznie z tymi noszącymi nazwę)*

**Stwierdzenie 6.14.** *Dodatkowo zachodzą następujące własności:*
*a) jeśli* $f$ *jest jednorodna stopnia* 1 *to* $c$ *i* $\mathbf{z}$ *są jednorodne stopnia* 1 *po* $y$*;*
*b) jeśli* $f$ *jest wklęsła, to* $c$ *jest wypukła po* $y$*.*

W ekonomii używa się terminu *koszt krańcowy* na pochodną $c$ po $y$ (oznaczaną zazwyczaj przez $MC$), a *koszt przeciętny* na iloraz $c$ i $y$ (oznaczaną zazwyczaj przez $AC$); ceny czynników produkcji wówczas traktujemy jako ustalone. Własność 9 oznacza, że koszt krańcowy jest niemalejący (jako funkcja $y$).

Wiemy, że minimalizacja kosztów jest warunkiem koniecznym maksymalizacji zysku, czyli $\Pi([\mathbf{w}, p]^T) = \max_{y \geq 0} p \cdot y - c(\mathbf{w}, y)$.

Stąd mamy jeszcze jeden warunek konieczny optymalizacji, tym razem przy użyciu funkcji kosztów: $p - \frac{\partial c(\mathbf{w}, y^*)}{\partial y} \leq 0$, z równością gdy $y^* > 0$; czyli dla $y^* > 0$ *cena jest równa kosztowi krańcowemu.*

## 6.4. Przykłady zastosowań.

### Co można wydobyć z niepełnych danych.

**Przykład 6.15.** *Firma Aqq SA używa wciąż tej samej technologii o funkcji produkcji* $f(x_1, x_2)$.

*Walne zgromadzenie akcjonariuszy ma rozważyć dalszy los zarządu, ale ma tylko niepełne dane: przy powielaniu sekretarce zagięła się kartka. Zasady są następujące: zmieniamy zarząd, jeśli z posiadanych danych wynika, że w którymś miesiącu postąpił nieracjonalnie; jeśli jesteśmy pewni, że zawsze maksymalizował zysk, pozostawiamy go; jeśli żadne z powyższych, musimy zażądać uzupełnienia danych i odłożyć decyzję do następnego walnego zgromadzenia.*

*Jaką decyzję powini podjąć akcjonariusze, jeśli te dane to:*

*a)*

| | $w_1$ | $w_2$ | *produkcja* | *koszty* |
|---|---|---|---|---|
| *styczeń* | *1* | *1* | *106* | *100* |
| *luty* | *2* | *2* | *105* | *200* |

*b)*

| | $w_1$ | $w_2$ | $x_1$ | $x_2$ | *produkcja* |
|---|---|---|---|---|---|
| *styczeń* | *1* | *2* | *10* | *20* | *106* |
| *luty* | *1* | *1* | *15* | *15* | *105* |

*Jedyne, co możemy zrobić, mając niepełne dane, to sprawdzić, czy wszystkie własności funkcji modelu są spełnione. Jeśli nie znamy zbioru dostępnych technologii ani* *funkcji produkcji, to nie możemy nigdy powiedzieć na pewno, że firma maksymalizowała zysk. Natomiast często możemy powiedzieć, że nie maksymalizowała.*

*a) Wiemy, że gdyby firma maksymalizowała zysk w obu okresach, to* $c(1,1,106) = 100$ *i* $c(2,2,105) = 200$. *Z własności funkcji kosztów wiemy, że* $c(2,2,106) = 200$ *(z jednorodności stopnia 1* $c$ *jako funkcji zmiennej* $\mathbf{w}$*), a ponieważ* $c$ *jest rosnąca jako funkcja wielkości produkcji* $c(2,2,106) > c(2,2,105) = 200$ *co daje sprzeczność – zarząd trzeba zwolnić.*

*b) Tym razem mamy dane dwie technologie i ceny czynników produkcji. Aby stwierdzić, że firma nie maksymalizowała zysku, wystarczy pokazać, że gdyby zastosować technologię z jednego okresu przy cenach z drugiego okresu, moglibyśmy mieć większy zysk. Ponieważ nie mamy danych cen produktu, może się to udać jedynie, gdy przy tych samych kosztach uzyskamy większą produkcję lub gdy przy mniejszych kosztach uzyskamy tę samę produkcję. Taka sytuacja mogłaby nastąpić w lutym: koszty poniesione wyniosły* 30 *i przy tych kosztach wyprodukowano* 105 *jednostek produktu. Gdyby użyć technologii ze stycznia, to koszty wyniosłyby również* 30, *ale przy produkcji* 106 *jednostek. Czyli znów zwalniamy zarząd.*

**Podział produkcji pomiędzy fabryki, kraje...** Jeśli mamy do czynienia z firmą posiadającą jedną fabrykę o określonej funkcji produkcji, wówczas funkcje modelu producenta możemy łatwo policzyć z definicji. A co jeśli firma ma więcej niż jedną fabrykę?

Przeanalizujemy sytaucję, gdy firma ma $m$ fabryk, być może w różnych krajach, w których są różne ceny czynników produkcji i chce podjąć decyzję, jak podzielić produkcję, w łącznej wielkości $y$ pomiędzy nie. Funkcję produkcji $i$-tej fabryki będziemy oznaczać przez $f_i(K,L)$, a jej funkcję kosztów przez $c_i(\mathbf{w}^i, y)$, przy czym wektory cen czynników produkcji wszystkich fabryk $\mathbf{w}^i$ są dane.

Możemy zacząć analizę od początku, czyli od funkcji produkcji: wypisać łączną funkcję produkcji $m$ fabryk w zależności od $2m$ czynników produkcji i dalej mamy standartowe zagadnienie minimalizacji kosztów. Możemy jednak oszczędzić sobie liczenia i skorzystać z już policzonych funkcji kosztów poszczególnych fabryk. Przy ograniczeniu, że łączna produkcja wynosi $y$, minimalizujemy łączne koszty: $\min_{y_1+y_2+\ldots+y_n=y} \sum c_i(\mathbf{w}^i, y_i)$.

Jeśli obliczymy warunki pierwszego rzędu, otrzymamy $\frac{\partial c_i(\mathbf{w}^i, y_i)}{\partial y_i} = \frac{\partial c_j(\mathbf{w}^j, y_j)}{\partial y_j}$ dla każdego $i$, $j$: koszty krańcowe w każdej fabryce muszą być równe. Równość ta ma, jak zwykle, proste sformułowanie łopatologiczne: nie opłaca się przenieść ”jednostki” produkcji z fabryki $i$ do fabryki $j$ ani na odwrót.

Zagadnienie podziału produkcji pomiędzy fabryki może mieć nietypowe zastosowania, które na pierwszy rzut oka nie mają nic wspólnego z produkcją – w pewnych zagadnieniach ekologicznych.

**Przykład 6.16.** *Kraje nadbałtyckie (jest ich $m$) postanowiły zmniejszyć zanieczyszczenia wpływające do Bałtyku o połowę. Zmniejszenie zanieczyszczeń kosztuje i łączny koszt jest pokrywany przez kraje w stosunku ustalonym w sposób niezależny od analizy kosztów (pewien rachunek korzyści). Wyprowadzić warunek konieczny minimalizacji łącznych kosztów zmniejszenia zanieczyszczeń o połowę, jeśli dla kraju $i$-tego $c_i(q)$ oznacza koszt zmiejszenia zanieczyszczeń o $q \cdot 100\%$, przy założeniu, że $c_i$ są funkcjami różniczkowalnymi, wypukłymi:*

*a) w przypadku gdy początkowo wszystkie kraje zrzucały do Bałtyku tyle samo zanieczyszczeń;*

*b) w przypadku gdy początkowe udziały krajów w łącznym zanieczyszczeniu są równe $a_i$ (dodatnie i sumują się do jedynki).*

*a) Wypiszemy zagadnienie optymalizacyjne:* $\min_{q_1+\cdots+q_m=50} \sum_{i=1}^m c_i(q_i)$. *Otrzymamy warunek konieczny jak w przypadku podziału produkcji między fabryki:* $\frac{\partial c_i(\mathbf{w}^i, y_i)}{\partial y_i} = \frac{\partial c_j(\mathbf{w}^j, y_j)}{\partial y_j}$ *dla każdego $i$, $j$.*

*b) Tym razem zagadnienie optymalizacyjne ma postać:* $\min_{a_1 \cdot q_1+\cdots+a_m \cdot q_m=50} \sum_{i=1}^m c_i(q_i)$. *Otrzymany warunek konieczny ma postać:* $\frac{\frac{\partial c_i(\mathbf{w}^i, y_i)}{\partial y_i}}{a_i} = \frac{\frac{\partial c_j(\mathbf{w}^j, y_j)}{\partial y_j}}{a_j}$ *dla każdego $i$, $j$.*

Co ciekawe, takie analizy zostały rzeczywiście przeprowadzone w latach dziewięćdziesiątych. Interesujące są zwłaszcza przepływy netto pomiędzy krajami. Jak należało oczekiwać, zasadniczo kraje lepiej rozwinięte zmniejszały emisję o mniej niż 50% i płaciły krajom gorzej rozwiniętym, które zmniejszały emisję o więcej niż pięćdziesiąt procent. Wytłumaczenie jest proste – koszty krańcowe dla tej samej wielkości $q$ są większe dla krajów bogatszych, używających już znacznie bardziej przyjaznych środowisku technologii: na przykład w Warszawie można wybudować oczyszczalnię ścieków, podczas gdy Kopenhaga już taką oczyszczalnię posiada i spuszcza ścieki, których dalsze oczyszczenie byłoby bardzo kosztowne. Podobnie wygląda sprawa z kosztami przestawienia na mniej szkodliwą produkcję. Od generalnej zasady były tylko dwa wyjątki, z których jeden związany jest z niniejszą analizą: Rosja podzieliła los krajów bogatych – wówczas jej gospodarka była na tyle nieefektywna, że zmniejszenie zanieczyszczeń okazało się praktycznie niewykonalne.

**6.5. Krótki i długi okres dla producenta.** Terminy "krótki okres", "średni okres" i "długi okres" nie mają jasnej definicji w teorii ekonomii. Mimo tego te pojęcia, a zwłaszcza pierwsze i ostatnie, są bardzo często używane. Granica pomiędzy krótkim a długim okresem, zmienia się w zależności od rodzaju produkcji: dla rolnika trzy miesiące będzie przeważnie krótkim okresem, zwłaszcza pomiędzy kwietniem a lipcem, a dla chałupniczego producenta wełnianych skarpet będzie to zapewne okres długi. Długość okresu określa ilość ustalonych nakładów czynników produkcji: w najdłuższym możliwym okresie, jak w naszych wcześniejszych analizach, wszystkie nakłady czynników produkcji są zmienne. Tak więc powyższa analiza zachowania producenta opisuje analizę zachowania producenta w długim okresie. Im krótszy okres, tym więcej czynników produkcji będzie ustalonych: umowy na dzierżawę kapitału podpisuje się np. na pół roku, a nawet na rok, natomiast szybciej można zwolnić pracowników lub przyjąć nowych (w warunkach polskich praca nie jest aż tak mobilna, przynajmniej jeśli chodzi o zatrudnionych legalnie, ale np. w Stanach Zjednoczonych średni okres wypowiedzenia wynosi dwa dni! – to też określa długość krótkiego okresu). Generalnie przy dwóch czynnikach produkcji, krótki okres to taki, w którym tylko praca jest zmienna, a kapitał ustalony. Uwaga: w analizie działania rynku pojęcia długości okresu nieco się zmienią, żeby pomieścić jeszcze sytuacje skrajne, które nie są interesujące z punktu widzenia producenta: okres na tyle krótki, że wszystko jest ustalone i okres na tyle długi, aby mogły powstać nowe firmy albo stare upaść.

W krótkim i średnim okresie występują więc koszty stałe i koszty zmienne. W tej sytuacji zagadnienie minimalizacji kosztów ma postać: $\min_{\substack{z\geq 0,\\ f(\mathbf{z})\geq y\\ z_i=\bar{z}_i \text{ dla } i\in\Phi}} \mathbf{w}^T\mathbf{z}$; gdzie $\Phi$ oznacza zbiór indeksów, dla których nakład czynnika jest ustalony.

**Definicja 6.17.** *Jeżeli w krótkim okresie dla $i \in \Phi$ $z_i = \bar{z}_i$, to funkcję $c^S : \operatorname{Int}\mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, taką że $c(\mathbf{w}, y) = \min_{\substack{z\geq 0,\ f(\mathbf{z})\geq y\\ z_i=\bar{z}_i \text{ dla } i\in\Phi}} \mathbf{w}^T\mathbf{z}$ nazywamy* krótkookresową funkcją kosztów, *a odwzorowanie $\mathbf{z}^S : \operatorname{Int}\mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}_+ \multimap \mathbb{R}_+^{n-1}$, takie że $\mathbf{z}(\mathbf{w}, y) = \operatorname{Argmin}_{\substack{z\geq 0,\ f(\mathbf{z})\geq y\\ z_i=\bar{z}_i \text{ dla } i\in\Phi}} \mathbf{w}^T\mathbf{z}$ –* krótkookresowym odwzorowaniem warunkowego popytu na czynniki produkcji. *Koszt stały to $\bar{c}^S = \sum_{i\in\Phi} w_i z_i$, a koszt zmienny $c^S - \bar{c}^S$.*

*Analogicznie definiujemy* krótkookresowe ogólne odwzorowanie podaży $\mathbf{y}^S(\mathbf{p}) = \operatorname{Argmax}_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbb{Y}\\ y_i=-\bar{z}_i \text{ dla } i\in\Phi}} \mathbf{p}^T\mathbf{y}$ *i* krótkookresową funkcję zysku*:* $\Pi^S(\mathbf{p}) = \max_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbb{Y}\\ y_i=-\bar{z}_i \text{ dla } i\in\Phi}} \mathbf{p}^T\mathbf{y}$.

Warto zauważyć, że o ile w długim okresie produkujemy tylko jeśli zysk z pewnego niezerowego poziomu produkcji jest nieujemny, o tyle w krótkim okresie możemy produkować przy ujemnym zysku, czyli *stracie*: o ile strata jest mniejsza niż koszt stały, czyli utarg ze sprzedaży produkcji $py$ jest większy niż koszt zmienny produkcji $y$.

*Warunkiem zaprzestania produkcji* w krótkim okresie jest: dla każdego $y > 0$ zachodzi nierówność $py < c^S(y) - \bar{c}^S$ – utarg ze sprzedaży produkcji nie pokrywa kosztów zmiennych.

Jeszcze jedna uwaga dotycząca kosztów. Koszty z punktu widzenia ekonomisty to coś zupełnie innego niż koszty księgowe (faktyczne dokonane i uwiecznione w dokumentach przepływy wypłat z tytułu użytkowania czynników produkcji oraz odliczenia na amortyzację). Drobny rolnik, który pracę wykonuje sam, na własnej działce, inwestuje własne pieniądze na nasiona i używa własnej łopaty (księgowość wykazałaby jedynie koszty zakupu nasion i ewentualnie amortyzację łopaty) ponosi takie same koszty jak gdyby pożyczył pieniądze na nasiona z banku, zapłacił za dzierżawę cudzej działki i wynajem łopaty oraz zatrudnił pracownika. Dzieje się tak dlatego, że posiadane pieniądze mógłby np. komuś pożyczyć albo ulokować w banku (za co uzyskałby odsetki), działkę mógłby wydzierżawić, a w czasie, kiedy pracuje "dla siebie" mógłby zarobić pienądze w innej firmie. Te koszty trzeba wziąć pod uwagę. Są to tak zwane *koszty alternatywne* albo *koszty poniechanych możliwości*. W analizie decyzji ekonomicznych nie mają natomiast znaczenia już poniesione koszty, których nie można odzyskać – są to *koszty utopione* – analizujemy tylko obecne i przyszłe koszty (faktyczne i alternatywne).

## 7. Równowaga cząstkowa

Teraz zajmiemy się połączeniem teorii konsumpcji i produkcji. Konsumenci dóbr i ich producenci spotykają sią na rynku, który ustala ceny. Zaczniemy od najprostszego ujęcia zagadnienia – podejścia równowagi cząstkowej. Polega ono na tym, że analizujemy jedynie rynek jednego dobra rozpatrywany niezależnie od innych (możemy tak postępować, jeśli już policzyliśmy funkcje popytu, podaży i kosztów uczestników rynku, i zakładamy, że wszystkie ceny pozostałych dóbr nie zmieniają się – jest to założenie nieco wygórowane). Na tym poziomie wszystkie informacje o konsumentach czerpiemy z ich funkcji popytu na to dobro, a o producentach z ich funkcji podaży produktu i funkcji kosztów. Na tej podstawie będziemy mogli opisać skąd się biorą i jak ewoluują ceny.

Tak więc rozważamy tylko abstrakcyjny rynek jednego, ustalonego dobra (powiedzmy $i$-tego), nie interesując się pozostałymi. Mamy zbiór $K$ konsumentów tego dobra i zbiór $F$ jego producentów – oba te zbiory są w naszej analizie skończone.

Przy ustalonych cenach pozostałych dóbr i dochodzie konsument $k$ ma fukcję popytu na dobro $i$ $\bar{x}_i^k(p_i)$.

Przy ustalonych cenach pozostałych dóbr (w tym czynników produkcji), producent $f$ ma funkcję podaży dobra $i$ $\bar{y}_i^f(p_i)$, a jeśli jest producentem jedynie dobra $i$, także funkcję kosztów $c^f(y)$.

Jesteśmy na *rynku wolnokonkurencyjnym.* Przetłumaczone na sytuację rzeczywistą, oznacza to, że wybór zarówno producentów jak i konsumentów jest podyktowany jedynie *względami ekonomicznymi* (nie ma zakazów ani nakazów), *nie ma kosztów wejścia* na rynek ani *wyjścia* z rynku, wszyscy uczestnicy dysponują *pełną informacją* o cenach: konsumenci o cenach dyktowanych przez różnych producentów (stąd nikt nie kupi po wyższej cenie niż najniższa oferowana; producent nie może więc podnosić ceny powyżej ceny rynkowej, bo nie sprzeda produkcji, a zakładamy, że zawsze zauważy, że popyt wzrósł i można podnieść cenę do nowej ceny rynkowej) oraz że to samo dobro produkowane przez różnych producentów jest *postrzegane identycznie* przez konsumentów. Jest to model idealny (jak np. modele ruchu bez tarcia w fizyce), ale całkiem nieźle modeluje rzeczywiste prawie konkurencyjne rynki (np. wspomniany już rynek gwoździ na Grzybowskiej albo giełdę kwiatową, ale już nie rynek samochodowy – tu marka gra rolę).

Te wszystkie elementy opisu można zastąpić dwoma założeniami: *jedynym parametrem wpływającym na wybór są ceny dóbr* i *ceny dóbr są traktowane jako dane.* Zakładamy, że wszystkie parametry poza ceną naszego dobra są ustalone.

**Definicja 7.1.** Funkcją popytu rynkowego na dobro $i$ *nazywamy funkcję* $d(p_i) = \sum_{k\in K} \bar{x}_i^k(p_i)$.

Funkcją podaży rynkowej *(albo* funkcją podaży gałęzi*)* dobra $i$ *nazywamy funkcję* $s(p_i) = \sum_{f\in F} \bar{y}_i^f(p_i)$.

Równowagą *nazywamy taki stan rynku (tj. cenę, konsumpcję i produkcję), że* $s(p_i) = d(p_i)$ *(podaż równa się popytowi). Taka cena* $p_i$ *jest nazywana* ceną równowagi *i wyznacza ona wszystkie pozostałe zmienne.*

Uwaga do ewentualnych wykresów: ze względu na tradycję ekonomiści rysują osie w wykresach popytu i podaży **na odwrót** – cena na pionowej, ilość na poziomej (czyli w rzeczywistości to, co rysujemy, będzie odwrotną funkcją popytu i podaży). Przyjmiemy tę konwencję, gdyż chyba nie ma książki, w której byłoby inaczej.

**7.1. Krótki i długi okres dla rynku.** Podobnie jak w przypadku podaży firmy, tak i podaż gałęzi może być z definicji długo-, średnio- albo krótko-okresowa. Tak więc sytuacja na rynku, a co za tym idzie równowaga też może być zależna od długości okresu. Tu określenia długości będą miały nieco inne znaczenie.

Znów nie ma tu precyzyjnej definicji długości okresu. Generalnie im krótszy okres, tym większa liczba czynników ustalona, co wpływa na postać funkcji podaży – im dłuższy okres, tym bardziej zmienna; ponadto z upływem czasu może pojawiać się coraz więcej kopii dobrze prosperującej firmy, natomiast coraz więcej firm mających straty upada. W naszych rozważaniach przyjmiemy następujący podział:

*krótki okres* – pewna część czynników produkcji ustalona (jako *bardzo krótki okres* będziemy rozumieć taki, w którym wszystkie czynniki ustalone, a więc produkcja ustalona), zbiór $F$ ustalony – nie powstają ani nie upadają firmy, firmy mogą produkować nawet przy ujemnym zysku, jeśli z utargu pokrywają przynajmniej koszty zmienne;

*średni okres* – wszystkie czynniki produkcji zmienne, istnieje tylko koszt stały istnienia firmy, zbiór $F$ ustalony, firmy produkują tylko jeśli zysk nieujemny (zakładamy że produkują też przy zysku 0);

*długi okres* – wszystko zmienne; powstają kopie firmy przynoszącej zysk dodatni, upadają firmy przynoszące stratę.

Zakładamy, że wszystkie rozważane funkcje są gładkie, funkcje kosztów są wypukłe, koszty krańcowe dążą do nieskończoności przy produkcji dążącej do nieskończoności, koszty przeciętne i koszty przeciętne zmienne mają kształt litery $U$.

**Stwierdzenie 7.2.** *Funkcje podaży dążą z czasem do poziomej* (**uwaga, osie są na odwrót!**) *prostej, zwanej* funkcją długookresowej podaży gałęzi, *gdzie cena równa się kresowi dolnemu zbioru minimów kosztów przeciętnych* ($p^* = \min_{f\in F}\min_{y>0}\frac{c^f(y)}{y}$). *Wówczas wszyscy producenci mają zysk równy* 0 *i każdy z nich produkuje na poziomie* $\operatorname{Argmin}_{y>0}\frac{c^f(y)}{y}$, *a liczba firm jest taka, żeby popyt był równy podaży.*

**Rysunek 7.1**

Jak to działa w rzeczywistości:

Niech $f$ firma taka, że $\min_{j\in F}\min_{y>0}\frac{c^j(y)}{y} = \min\frac{c^f(y)}{y}$ i to minimum jest przyjmowane dla $y = y^*$.

Jeśli $p > p^*$, to z czasem pojawiają się kopie firmy $f$, bo osiąga ona dodatnie zyski i największe ze wszystkich firm, ale popyt się nie zmienił, więc cena musi spaść, gdyż inaczej producenci zostaliby z towarem. Jeśli natomiast $p < p^*$, to wszystkie firmy przynoszą stratę. W długim okresie część z nich zaprzestanie produkcji i rozwiąże się, a więc przy tym samym popycie spadnie podaż. Stąd cena musi wzrosnąć, gdyż konsumenci są skłonni zapłacić więcej, byle tylko dostać brakujące dobro.

Czyli w długim okresie to funkcja produkcji najlepszej technologii (a dokładniej jej funkcja kosztów) determinuję cenę równowagi, każda z firm będzie produkować $\mathrm{Argmin}_{y\geq 0}\frac{c^f(y)}{y}$, gdzie $f$ – firma stosująca najlepszą technologię, a firm będzie tyle by zaspokoić popyt.

W bardzo krótkim okresie przeciwnie – jedynie popyt determinuje równowagę (bo podaż ustalona). Ma to miejsce w sytuacji, gdy przy ustalonej produkcji następuje tzw. *szok popytowy*: *pozytywny*, czyli skokowe, nieprzewidziane zwiększenie popytu (np. miasto zostaje zamknięte z powodu epidemii lub oblężenia i ludzie zaczynają w panice kupować żywność; do niewielkiego miasta sprowadzają się imigranci itp.) lub *negatywny* (jak np. informacja o wściekłych krowach na rynku wołowiny). Jeżeli jest dokładnie $Q$ towaru na rynku, to ustali się cena $p$, taka że $d_i(p) = Q$ (w krótkim okresie funkcja podaży jest na wykresie pionowa – znów uwaga na osie).

Im dłuższy okres, tym krzywa podaży jest bardziej płaska, coraz mniejszy wpływ na cenę ma popyt. Najpierw już istniejące firmy zwiększają lub zmniejszają zatrudnienie kolejnych czynników, które stały się zmienne. Potem powstają nowe firmy albo upadają istniejące. Z czasem cena wróci do poprzedniej ceny równowagi długookresowej, przy tej samej produkcji pojedynczych firm, jedynie przy większej ilości firm.

**Rysunek 7.2**

**Przykład 7.3.** *Mamy rynek w równowadze długookresowej, na którym działają tylko firmy o funkcji produkcji Cobb-Douglasa* $f(K,L) = K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{1}{3}}$*, o kosztach stałych działalności* $c_s = \frac{1}{6}$*, ceny czynników wynoszą* $p_k = \frac{1}{2}$ *i* $p_l = 1$*. Funkcja popytu to* $d(p) = 400 - 100p$*.*

*Jak łatwo policzyć, w krótkim okresie (*$K = \bar{K}$*,* $L$ *zmienne) funkcja kosztów ma postać*
$c(y) = \frac{1}{6} + \min_{\substack{y=K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{1}{3}}\\ K=\bar{K}}} \frac{1}{2}K + L = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\bar{K} + y^3\bar{K}^{-\frac{1}{2}}$*, a w długim okresie* $c(y) = \frac{1}{6} + \min_{y=K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{2}K + L = \frac{1}{6} + \frac{3}{2}y^2$*.*

*W równowadze długookresowej cena na rynku równa jest* $\min_{y\geq 0}\frac{c(y)}{y} = 1$*, każda z firm produkuje* $y = \frac{1}{3}$*, przy nakładach* $L = \frac{1}{9}$ *i* $K = \frac{1}{9}$*. Ponieważ popyt wynosi* $d(1) = 300$*, więc na rynku jest* $900$ *aktywnych firm.*

*Teraz zobaczmy, co się stanie, jeśli do miasta sprowadzą się nowi mieszkańcy, co zwiększy popyt do* $d'(p) = 750 - 150p$.

*W bardzo krótkim okresie podaż jest* $300$, *więc* $300 = 750 - 150p$, *więc cena ustali się na* $p' = 3$. *W krótkim okresie można zwiększyć produkcję zwiększając zatrudnienie pracy.*

*Krótkookresowa funkcja kosztów ma postać* $c(y) = \frac{2}{9} + 3y^3$, *a więc każda firma jest skłonna wyprodukować* $\mathrm{Argmax}_{y \geq 0}\, py - c(y)$, *czyli* $y = \frac{1}{3}p^{\frac{1}{2}}$. *Stąd funkcja podaży gałęzi to* $s(p) = 300p^{\frac{1}{2}}$. *W równowadze krótkookresowej* $750 - 150p = 300p^{\frac{1}{2}}$, *co wyznacza cenę* $p'' = 7 - 2\sqrt{6}$.

*W średnim okresie na rynku jest nadal 900 aktywnych firm o funkcji kosztów* $c(y) = \frac{1}{6} + 3y^2$ *i produkcja każdej równa się* $\mathrm{Argmax}_{y \geq 0}\, py - c(y)$, *czyli* $y = \frac{1}{3}p$. *Stąd* $s(p) = 300p$. *W równowadze średniookresowej* $750 - 150p = 300p$, *co wyznacza cenę* $p''' = \frac{5}{3}$.

*W długim okresie cena znów jest* $1$, *każda z firm produkuje* $y = \frac{1}{3}$, *przy nakładach* $L = \frac{1}{9}$ *i* $K = \frac{1}{9}$ *i ma zerowy zysk. Ponieważ popyt wynosi* $d(1) = 600$, *więc na rynku jest* $1800$ *aktywnych firm.*

***Rysunek 7.3***

Uwaga: to, że zysk w równowadze w długim okresie jest zerowy nie jest bezsensowne: oznacza to, że przychód jest równy kosztom. Przypomnijmy jednak, że bierzemy pod uwagę koszty alternatywne. Zerowy zysk oznacza jedynie, że jeśli zainwestujemy w naszą działalność, to uzyskamy tyle samo jak przy najlepszej możliwej innej inwestycji (np. właściciel firmy zarabia za swoją pracę tyle samo ile uzyskałby jako prezes na państwowej posadzie).

Co jeśli konkurencja nie jest doskonała: np mamy licencje (za które trzeba zapłacić) na taksówki, sprzedaż alkoholu albo administracyjne utrudnienia w konkurencji (np. urzędnik oczekuje łapówki)?

Każda firma patrzy, czy opłaca jej się wejść na rynek. Nawet jeśli zysk jest dodatni to może nie wystarczyć na pokrycie kosztu wejścia na rynek. Wówczas firmy, które już są na rynku mogą mieć wysokie zyski nawet w długim okresie – możemy je określić jako ekonomiczną ”rentę z bycia pierwszym”. Jeśli jakaś firma zdecyduje się sprzedać swoją licencję, to za cenę przynajmniej równą zdyskontowanemu strumieniowi przyszłych dochodów (przy założeniu doskonałego rynku kredytów i doskonałej infromacji), a wchodząca firma nie da więcej.

**Skutki opodatkowania – przykład analizy.** Załóżmy, że jesteśmy w równowadze długookresowej. Rząd, chcąc zwiększyć wpływy do budżetu, nakłada podatek na produkt produkowany przez firmy doskonale konkurencyjne: w kwocie $t$ od jednostki. Jakie będą tego skutki?

Wszystko jedno, przez kogo fizycznie jest płacony podatek i czy jest wliczony w cenę, rezultat będzie taki sam: zmiejszenie produkcji.

Jeżeli podatek jest wliczony w cenę i płaci go producent, wówczas przy cenie rynkowej $p^*$, podaż producenta jest równa $s(p^* - t)$ (to oznacza przesunięcie krzywej podaży o $t$ w górę), a popyt się nie zmienia. W bardzo krótkim okresie cena nie zmieni się, czyli cały ciężar podatku ponoszą producenci. Z czasem cena będzie wzrastać, a podaż maleć, a udział konsumentów w płaceniu podatku wzrastać, aż w długim okresie cena będzie wynosić $p^* + t$, czyli cały ciężar podatku spada na konsumentów.

Jeżeli podatek nie jest wliczony w cenę i płaci go konsument, wówczas przy cenie rynkowej $p^*$, podaż producenta nie zmienia się a popyt jest równy $d(p^* + t)$ (ważne jest, ile łącznie muszę zapłacić, kupując dobro; to oznacza przesunięcie krzywej popytu o $t$ w dół). W bardzo krótkim okresie podaż nie zmieni się, więc cena musi spaść od $p^* - t$, czyli cały ciężar podatku ponoszą producenci. Z czasem cena będzie wzrastać i podaż maleć, a udział konsumentów w płaceniu podatku wzrastać, aż w długim okresie cena będzie wynosić $p^*$, czyli cały ciężar podatku spada na konsumentów.

W obu sytuacjach zysk każdego producenta i faktyczna cena płacona przez konsumenta za dobro jest taka sama.

**Rysunek 7.4**

Zobaczmy teraz jak w średnim i długim okresie wpływy podatkowe mają się do tego, co tracą uczestnicy rynku. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że to producent płaci podatek. W obu sytuacjach produkcja się zmniejsza, a więc wpływy rządu z podatków (pole prostokąta o bokach $t$ i $y'$) są mniejsze niż to, co tracą łącznie konsumenci i producenci : zmniejszenie sumy ich nadwyżek (nadwyżka konsumentów przy cenie $p$ to pole figury pomiędzy krzywą popytu a poziomą prostą na wysokości płaconej ceny $p$ aż do przecięcia popytu z podażą, a producenta pole figury pomiędzy prostą poziomą na wysokości otrzymywanej ceny netto: $p$ przed podatkiem, $p - t$ po, a krzywą podaży aż do przecięcia krzywych popytu i podaży).

**Rysunek 7.5**

## 8. Równowaga ogólna

W przedstawionych tu prostych modelach równowagi ogólnej nie stosujemy sztucznego podziału na odrębne rynki, lecz badamy *rynek jako całość*. Interesują nas równowagi, jednakże nie analizujemy procesu dochodzenia do równowagi, a jedynie kwestię jej istnienia i własności.

**8.1. Model czystej wymiany towarowej.** Zaczniemy od analizy sytuacji, w której nie ma producentów – dobra już zostały wyprodukowane i pewne ich koszyki są w posiadaniu konsumentów. Ponieważ jest to w odniesieniu do obecnych rynków sytuacja raczej nietypowa (gracze mają i chcą uzyskać pewne koszyki dóbr, a w tym modelu nie możemy traktować pieniądza jako jednego z dóbr o ustalonej cenie 1), aby łatwiej było o intuicję, wyobraźmy sobie imprezę składkową – każdy z jej uczestników przynosi pewien koszyk dóbr (jeden kiełbaski, drugi chleb i musztardę, trzeci piwo...), po czym każdy chce skonsumować ten koszyk, który jest najlepszy z dostępnych mu – niekoniecznie ten, który przyniósł. Oczywiście im więcej tym lepiej (przynajmniej przy ilościach, które zostały przyniesione).

Mamy $n$ dóbr i skończony zbiór $K$ konsumentów. Zakładamy, że każdy konsument ma zbiór możliwych decyzji $\mathbb{X} = [0, M]^n$ (gdzie $M$ jest pewną stałą dodatnią), a na nim określoną funkcję użyteczności. Użyteczność $k$-tego konsumenta będziemy oznaczać przez $u^k$. Standartowo będziemy zakładać, że jest ona ciągła, ściśle quasi-wklęsła, monotoniczna i lokalnie nienasycona.

Na początku $k$-ty konsument posiada zasób początkowy: koszyk $\omega^k$. Konsumenci mogą wymieniać się dobrami, a każdy z nich dąży do tego, żeby mieć jak najwyższą użyteczność.

**Definicja 8.1.** *a) Dowolny wektor koszyków dóbr $\left[x^k\right]_{k\in K}$, taki że $\sum_{k\in K} x^k \leq \sum_{k\in K} \omega^k$ nazywamy* alokacją.

*b) Alokację $\left[x^k\right]_{k\in K}$ nazywamy* optymalną w sensie Pareto *(lub* efektywną w sensie Pareto*), jeśli nie istnieje inna alokacja $\left[\bar{x}^k\right]_{k\in K}$, dla której dla każdego $k \in K$ zachodzi nierówność $u^k(\bar{x}^k) \geq u^k(x^k)$ i dla co najmniej jednego $k \in K$ zachodzi nierówność $u^k(\bar{x}^k) > u^k(x^k)$.*

*c) Alokację $\left[x^k\right]_{k\in K}$ nazywamy* indywidualnie racjonalną*, jeśli dla każdego $k \in K$ zachodzi nierówność $u^k(x^k) \geq u^k(\omega^k)$.*

Inaczej mówiąc, alokacja jest takim układem koszyków dóbr, który fizycznie może zostać zrealizowany, jeśli łącznie posiadamy tyle, ile wnieśli uczestnicy wymiany. Często używa się słowa *podział*, ale wówczas, żeby formalnie był to podział, należałoby umieścić w definicji równość zamiast nierówności. Oczywiście sensowane alokacje są podziałami: chociażby alokacje optymalne w sensie Pareto, a w szczególności równowagi (w dalszych rozważaniach).

Alokacja jest optymalna w sensie Pareto, jeśli nie jest możliwa sytuacja, w której "polepszamy" przynajmniej jednemu z graczy, a "nie pogarszamy" żadnemu innemu. Pojęcie optymalności w sensie Pareto ma szerokie zastosowanie we wszelkich zagadnieniach optymalizacji wielokryterialnej, w tym zagadnieniach społecznego wyboru. Pojęcie to jest bardzo słabe – zgodnie z nim nie można porównać ze sobą alokacji, w której jeden z graczy zabiera wszystko, a drugi umiera z głodu, z sytuacją w której bogatszy traci pewną niewielką kwotę na rzecz biedniejszego. Ta słabość porównywania w sensie Pareto jest jeszcze bardziej widoczna w innych zagadnieniach wyboru społecznego – na przykład sytuacji, kiedy złodziej niszczy transformator wart 10000 złotych, żeby ukraść drut, za który uzyska 100 złotych (a więc "globalnie" mamy na minus 9900), nie można porównać z sytaucją, kiedy do kradzieży nie dochodzi. Tak więc gdyby stosować jedynie kryterium Pareto, nie można by było powiedzieć, że kradzież ze zniszczeniem jest dla społeczeństwa gorsza. Ze względu na słabość optymalności w sensie Pareto, jej brak jest zjawiskiem bardzo negatywnym: oznacza, że marnotrawiona jest pewna użyteczność, którą ktoś może uzyskać bez straty użyteczności innych.

Zauważmy, że jeśli wszystkie funkcje użyteczności są ściśle rosnące, to alokacje nie będące podziałami nie są optymalne w sensie Pareto – wówczas można by niewykorzystaną ilości dóbr dać przynajmniej jednemu z graczy.

Alokacja jest indywidualnie racjonalna, jeśli żaden z konsumentów nie będzie wolał swojego zasobu początkowego od proponowanego mu przy tej alokacji koszyka.

Alokacje będące podziałami przedstawia się na tak zwanym *prostokącie Edgewortha* (albo też pudełku Edgewortha – Edgeworth box).

Jak rysujemy prostokąt Egdewortha? Najpierw rysujemy mapę obojętności konsumenta 1. Następnie na tym samym rysunku umieszczamy drugi układ współrzędnych: o początku w punkcie $(\omega_1^1+\omega_1^2, \omega_2^1+\omega_2^2)$ – sumie zasobów początkowych graczy, czyli ilości dóbr, które mamy do podziału – i obu osiach o zwrotach przeciwnych do analogicznych osi dla konsumenta 1. W drugim układzie współrzędnych rysujemy mapę obojętności konsumenta 2. Jak łatwo widać, wszystkie punkty prostokątu Edgewortha są alokacjami.

**Rysunek 8.1**

Optymalność w sensie Pareto i indywidualna racjonalność to minimalne właściwości, jakie powinna mieć alokacja.

Jak widać z rysunku 8.1, przeważnie jest continuum alokacji, które są równocześnie optymalne w sensie Pareto i indywidualnie racjonalne. Tak więc te dwa kryteria nie wystarczają do wyboru alokacji.

Jak więc odbywa się wymiana? Otóż na wszystkie zostają określone ceny. Te ceny nie muszą mieć jakiegokolwiek związku z rzeczywistą wartością dóbr (łyżeczka musztardy może okazać droższa niż kilo kiełbasy i butelka piwa razem wzięte), służą jedynie ustaleniu jednoznacznie alokacji równowagi. Każdy z graczy sprzedaje swój zasób początkowy i za uzyskane pieniądze kupuje taki koszyk, który maksymalizuje jego użyteczność.

Wprawdzie w odniesieniu do imprezy składkowej taki proces wydaje się nieco sztuczny, ale można na niego spojrzeć jako na konstrukcję teoretyczną pozwalającą na wybór jednej alokacji, zwłaszcza jeśli ceny nie będą w pieniądzu, ale na przykład w zapałkach albo specjalnie narysowanych imprezowych banknotach.

**Definicja 8.2.** *Alokację* $\left[x^k\right]_{k\in K}$ *wraz z wektorem cen* $\mathbf{p}$ *nazwiemy równowagą Walrasa dla modelu czystej wymiany towarowej, jeśli dla każdego konsumenta jego koszyk przy alokacji jest równy jego popytowi przy tych cenach i dochodzie równym wartości zasobu początkowego* $x^k = x^k(\mathbf{p}, \mathbf{p}^T\omega^k)$ *oraz suma popytów jest nie większa niż suma zasobów początkowych.*

Równowaga Walrasa dla modelu czystej wymiany towarowej jest więc to taki wektor koszyków $\left[x^k\right]_{k\in K}$ wraz z wektorem cen $\mathbf{p}$, że

1) $\forall k \in K\ \mathbf{p}^T x^k \le \mathbf{p}^T\omega^k$ (osiągalność przy cenach $\mathbf{p}$),
2) $\forall k \in K\ \forall \xi \in \mathbb{X} : \mathbf{p}^T\xi \le \mathbf{p}^T\omega^k\ \left[u^k(\xi) \le u^k(x^k)\right]$ (optymalność przy cenach $\mathbf{p}$) i
3) $\sum_{k\in K} x^k \le \sum_{k\in K}\omega^k$ (fizyczna dostępność).

Zauważmy, że z definicji nie widać, że równowaga musi być podziałem. Jednak jest nie tylko podziałem, jest również optymalna w sensie Pareto:

**Twierdzenie 8.3.** *(pierwsze twierdzenie Walrasa o dobrobycie)*

*a) Równowaga Walrasa dla modelu czystej wymiany towarowej jest indywidualnie racjonalna.*

*b) Jeśli dla każdego* $k$ *funkcje użyteczności* $u^k$ *są monotoniczne i lokalnie nienasycone, to równowaga Walrasa dla modelu czystej wymiany towarowej jest optymalna w sensie Pareto.*

Tak więc choć w definicji nie zakładamy, że wszystkie dobra zostają skonsumowane, to równoważnie moglibyśmy to założyć – umieścić równość zamiast nierówności.

**Dowód:**

Weźmy alokację $\left[x^k\right]_{k\in K}$, która wraz z wektorem cen $\mathbf{p}$ stanowi równowagę Walrasa.

a) Indywidualna racjonalność:

Przypuśćmy przeciwnie, tzn. istnieje taki konsument $k$, że $u^k(x^k) < u^k(\omega^k)$. Zauważmy, że zarówno $x^k$ jak i $\omega^k$ są dostępne przy cenach $\mathbf{p}$, a $x^k$ maksymalizuje $u^k$ w zbiorze budżetowym $B_{\mathbf{p},\mathbf{p}^T\omega^k}$. Tak więc $u^k(x^k) \ge u^k(\omega^k)$ – sprzeczność.

b) Optymalność w sensie Pareto:

Przypuśćmy przeciwnie, tzn. istnieje taka alokacja $\left[y^k\right]_{k\in K}$ fizycznie dostępna, że dla każdego konsumenta $k$ $u^k(y^k) \ge u^k(x^k)$ i istnieje $l$, że $u^l(y^l) > u^l(x^l)$. Ponieważ to

$x^l$ a nie $y^l$ został wybrany, $y^l$ nie mogło być dostępne przy cenach, czyli $\mathbf{p}^T y^l > \mathbf{p}^T \omega^l$. Ponieważ funkcja $u$ jest monotoniczna i lokalnie nienasycona, więc spełnia prawo Walrasa. Tak więc dla każdego $k$ $y^k$ nie może należeć do wnętrza $B_{\mathbf{p},\mathbf{p}^T\omega^k}$, czyli $\mathbf{p}^T y^k \geq \mathbf{p}^T \omega^k$ (z przynajmniej jedną nierównością ostrą, co przed chwilą pokazaliśmy).

Jeżeli zsumujemy te wszystkie nierówności po $k$, otrzymamy $\sum_{k\in K} \mathbf{p}^T y^k > \sum_{k\in K} \mathbf{p}^T \omega^k$.

Natomiast gdy przemożymy nierówność fizycznej dostępności obustronnie przez $\mathbf{p}$, otrzymamy $\sum_{k\in K} \mathbf{p}^T y^k \leq \sum_{k\in K} \mathbf{p}^T \omega^k$ – sprzeczność.

■

Kolejnym pytaniem jest, czy dowolny koszyk optymalny w sensie Pareto i indywidualnie racjonalny można uzyskać dobierając odpowiednie ceny. I tu odpowiedź jest również twierdząca.

**Twierdzenie 8.4.** *(drugie twierdzenie Walrasa o dobrobycie)*

*Przy założeniach modelu jeśli alokacja* $\left[x^k\right]_{k\in K}$ *jest optymalna w sensie Pareto, to istnieje taki układ zasobów początkowych konsumentów* $[\omega^k]_{k\in K}$ *oraz wektor cen* $\mathbf{p}$, *że* $\left[x^k\right]_{k\in K}$ *z* $\mathbf{p}$ *stanowi równowagę Walrasa dla modelu czystej wymiany towarowej przy układzie zasobów początkowych konsumentów* $[\omega^k]_{k\in K}$.

**Dowód:**

Dla dwóch konsumentów – wszystko to będziemy rozważać na prostokącie Edgewortha, gdzie zbiory związane z $k$-tym konsumentem zaznaczamy w jego układzie współrzędnych. Będziemy korzystać z twierdzenia o hiperpłaszczyźnie rozdzielającej. Ponieważ $\left[x^k\right]_{k\in K}$ – optymalny w sensie Pareto, więc stanowi on "punkt styczności" dwóch zbiorów $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : u^k(x) \geq u^k(x^k)\}$ w prostokącie Edgewortha – należy do brzegu obu. Ponieważ $u^k$ – quasi-wklęsłe, te zbiory są wypukłe. Rozdzielamy wnętrza tych zbiorów – dwa zbiory wypukłe rozłączne. Z jednego z **twierdzeń o hiperpłaszczyźnie rozdzielającej** dwa zbiory wypukłe rozłączne $A$ i $B \in \mathbb{R}^n$ istnieje wektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, że dla każdego $x \in A$ i $y \in B$ $\mathbf{p}^T x \leq \mathbf{p}^T y$. W naszym przypadku $A$ i $B$ to zbiory $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : u^k(x) \geq u^k(x^k)\}$ dla obu graczy w prostokącie Edgewortha. Ten wektor $\mathbf{p}$ ma wszystkie współrzędne nieujemne, gdyż $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : u^k(x) \geq u^k(x^k)\}$ zawiera $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : x \geq x^k\}$, tak więc jest naszym wektorem cen równowagi przy dowolnym $[\omega^k]_{k\in K}$ należącego do prostej rozdzielającej.

■

Kolejne naturalne pytanie, to czy równowaga istnieje. Odpowiedź jest również twierdząca, lecz odpowiednie twierdzenie sformułujemy dla znacznie ogólniejszego modelu – modelu Arrowa-Debreu, w którym oprócz konsumentów mamy również producentów.

**8.2. Model Arrowa-Debreu.** Założenia o konsumentach w modelu Arrowa-Debreu są takie same jak w modelu czystej wymiany towarowej.

Ponadto mamy skończony zbiór $F$ firm.

Każdy konsument może posiadać akcje firm. Liczbę akcji $f$-tej firmy w rękach $k$-tego konsumenta będziemy oznaczać przez $T_f^k$. Akcja oznacza udział w zysku (czyli także udział w stracie, jeśli firma przynosi stratę). Tak więc zakładamy, że $\sum_{k\in K} T_f^k = 1$.

Firma $f$ ma zbiór dostępnych technologii $\mathbb{Y}^f \subset [-M, M]^n$. Wszystkie $\mathbb{Y}^f$ są niepuste, domknięte i ściśle wypukłe. Każda z firm maksymalizuje zysk, traktując ceny jako dane, przy czym kupuje czynniki produkcji od konsumentów i sprzedaje im produkty.

**Definicja 8.5.** *Równowagą Walrasa nazywamy układ wektorów* $\left[x^k\right]_{k\in K}$, $\left[y^f\right]_{f\in F}$ *wraz z wektorem cen* $\mathbf{p}$, *taki że*

*1)* $\forall f \in F\ \forall y^f \in \mathbb{Y}^f$ *(wykonalność planów produkcyjnych);*

*2)* $\forall k \in K\ \mathbf{p}^T x^k \le \mathbf{p}^T \omega^k + \sum_{f\in F} T_f^k \cdot \mathbf{p}^T y^f$ *(osiągalność planów konsumpcyjnych przy cenach* $\mathbf{p}$*);*

*3)* $\forall f \in F\ \forall \theta \in \mathbb{Y}^f\ \left[\mathbf{p}^T\theta \le \mathbf{p}^T y^f\right]$ *(maksymalizacja zysku przez producentów);*

*4)* $\forall k \in K\ \forall \xi \in \mathbb{X} : \mathbf{p}^T\xi \le \mathbf{p}^T\omega^k + \sum_{f\in F} T_f^k \cdot \mathbf{p}^T y^f\ \left[u^k(\xi) \le u^k(x^k)\right]$ *(maksymalizacja użyteczności przez konsumentów);*

*5)* $\sum_{k\in K} x^k \le \sum_{k\in K}\omega^k + \sum_{f\in F}^k y^f$ *(fizyczna dostępność planów konsumpcyjnych), przy czym jeśli po* $i$*-tej współrzędnej nierówność jest ostra, to* $p_i = 0$.

**Twierdzenie 8.6.** *Przy założeniach modelu istnieje równowaga Walrasa.*

**Dowód:**

Niech $y^f(\mathbf{p})$ oznacza plan produkcyjny maksymalizujący zysk producenta $f$ przy cenie $\mathbf{p}$, a $x^k(\mathbf{p})$ – koszyk maksymalizujący użyteczność konsumenta $k$ wśród osiągalnych przy $\mathbf{p}$ planów konsumpcyjnych, przy założeniu że producenci wybierają swoje $y^f(\mathbf{p})$.

Z twierdzenia o maksimum $y^f$ jest ciągłą funkcją zmiennej $\mathbf{p}$. Z powyższego faktu i z twierdzenia o maksimum, również $x^k$ jest ciągłą funkcją zmiennej $\mathbf{p}$.

Konstruujemy funkcję nadwyżki popytu $z(\mathbf{p}) = \sum_{k\in K} x^k(\mathbf{p}) - (\sum_{k\in K}\omega^k + \sum_{f\in F} y^f(\mathbf{p}))$ (ujemne wartości oznaczają nadwyżkę podaży).

Z prawa Walrasa dla optymalizacji konsumenta otrzymujemy, że dla każdego $k$ $\mathbf{p}^T x^k(\mathbf{p}) - \left(\mathbf{p}^T\omega^k + \sum_{f\in F} T_f^k \cdot \mathbf{p}^T y^f(\mathbf{p})\right) = 0$.

**Twierdzenie 8.7.** *Prawo Walrasa (dla rynku)*

*Przy założeniach modelu dla każdego wektora cen* $\mathbf{p}$ $\mathbf{p}^T z(\mathbf{p}) = 0$ *(nadwyżka popytu jest prostopadła do* $\mathbf{p}$*).*

Ekonomiści formułują to jako "wartość niedoborów jest równa wartości nadwyżek".

**Dowód prawa Walrasa dla rynku**

Jeśli dodamy równości wynikające z prawa Walrasa dla konsumentów, otrzymamy
$0 = \sum_{k\in K}\left(\mathbf{p}^T x^k(\mathbf{p}) - (\mathbf{p}^T\omega^k + \sum_{f\in F} T_f^k \mathbf{p}^T y^f(\mathbf{p})\right) =$
$= \sum_{k\in K}\mathbf{p}^T x^k(\mathbf{p}) - \sum_{k\in K}\mathbf{p}^T\omega^k - \sum_{f\in F}\sum_{k\in K} T_f^k \mathbf{p}^T y^f(\mathbf{p}) =$ (ponieważ udziały sumują się do 1)
$= \sum_{k\in K}\mathbf{p}^T x^k(\mathbf{p}) - \sum_{k\in K}\mathbf{p}^T\omega^k - \sum_{f\in F}\mathbf{p}^T y^f(\mathbf{p}) =$
$= \mathbf{p}^T\left(\sum_{k\in K} x^k(\mathbf{p}) - \sum_{k\in K}\omega^k - \sum_{f\in F} y^f(\mathbf{p}\right) = \mathbf{p}^T z(\mathbf{p}).$

■

Wracamy do dowodu twierdzenia o istnieniu równowagi.

Twierdzenie to można równoważnie sformułować: istnieje cena, dla której nadwyżka popytu jest równa 0. Ponieważ na pewno nie jest to wektor $\mathbf{0}$, a zarówno $x^k$ jak i $y^f$ są jednorodne stopnia 0, możemy ograniczyć się do wektorów cen, których współrzędne sumują się do 1 – sympleksu $\Delta = \{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$.

Ustalam dowolny wektor cen $\mathbf{p}$. Przy tych cenach mogą wystąpić niedobory – w konstrukcji nowej ceny $f(\mathbf{p})$ rozpatrywać tylko faktyczne nadwyżki, zaniedbując niedobory. Wprowadzamy oznaczenie: dla $\xi\in\mathbb{R}^n$ oznaczmy przez $\xi^+$ wektor $\max\{0,\xi\}$.

Na sympleksie $\Delta$ definiujemy funkcję $f(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}+(z(\mathbf{p}))^+}{\left\|\mathbf{p}+(z(\mathbf{p}))^+\right\|_1} = \frac{\mathbf{p}+(z(\mathbf{p}))^+}{1+\sum_{i=1}^n (z_i(\mathbf{p}))^+}$.

Funkcja $f : \Delta\to\Delta$ i jest ciągła, a więc na mocy twierdzenia Brouwera istnieje $\mathbf{p}\in\Delta$ takie, że $f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$.

Czyli dla każdego $i$ $\frac{p_i+(z(\mathbf{p}))_i^+}{1+\sum_{j=1}^n (z_j(\mathbf{p}))^+} = p_i$.

Stąd $p_i + (z(\mathbf{p}))_i^+ = p_i\cdot\left(1+\sum_{j=1}^n (z_j(\mathbf{p}))^+\right)$,
czyli $p_i + (z(\mathbf{p}))_i^+ = p_i + p_i\sum_{j=1}^n (z_j(\mathbf{p}))^+$,
$(z(\mathbf{p}))_i^+ = p_i\sum_{j=1}^n (z_j(\mathbf{p}))^+ \mid \cdot z_i(\mathbf{p})$
$z_i(\mathbf{p})\cdot(z_i(\mathbf{p}))^+ = z_i(\mathbf{p})\cdot p_i\cdot\sum_{j=1}^n (z_j(\mathbf{p}))^+$, co sumujemy po $i$ i otrzymujemy:
$\sum_{i=1}^n z_i(\mathbf{p})\cdot(z_i(\mathbf{p}))^+ = \sum_{i=1}^n\left(z_i(\mathbf{p})\cdot p_i\cdot\sum_{j=1}^n (z_j(\mathbf{p}))^+\right)$, a więc
$\sum_{i=1}^n z_i(\mathbf{p})\cdot(z_i(\mathbf{p}))^+ = \sum_{i=1}^n (z_i(\mathbf{p})\cdot p_i)\cdot\sum_{j=1}^n (z_j(\mathbf{p}))^+$
Z prawa Walrasa dla rynku $\sum_{i=1}^n (z_i(\mathbf{p})\cdot p_i) = 0$, a więc
$\sum_{i=1}^n z_i(\mathbf{p})\cdot(z_i(\mathbf{p}))^+ = 0$, czyli nie ma faktycznych nadwyżek popytu– mogą być tylko niedobory. Tak więc $\sum_{k\in K} x^k \le \sum_{k\in K}\omega^k + \sum_{f\in F} y^f$ – brakujący warunek 5. równowagi Walrasa (reszta była automatycznie spełniona).

■

Twierdzenie o istnieniu udowodniliśmy przy bardzo silnych założeniach. Gdybyśmy nie zakładali ścisłej a tylko zwykłą quasi-wklęsłość funkcji użyteczności lub wypukłość zbiorów dostępnych technologii, nie ma wówczas jednoznaczności – popyt lub podaż nie jest funkcją, lecz odwzorowaniem wielowartościowym. Twierdzenie o istnieniu równowagi Walrasa pozostaje prawdziwe, lecz dowód staje się bardziej skomplikowany, jednak wszystko się przenosi: zamiast funkcji popytu i podaży mamy odwzorowania wielowartościowe, zamiast ciągłości funkcji – półciągłość górną odwzorowań wielowartościowych, a twierdzenie Brouwera trzeba zastąpić twierdzeniem Kakutaniego o istnieniu punktu stałego dla odwzorowania wielowartościowego.

## 9. MONOPOL

Jak w modelu równowagi cząstkowej analizujemy rynek pojedynczego towaru, lecz tym razem nie ma konkurencji – jest jej przeciwieństwo. Dla uproszczenia zapisu opuścimy indeks dobra przy cenach i ilościach.

Nazwa pochodzi od prawa wyłącznego handlu. Monopol jest to firma lub mała grupa firm działających wspólnie (a więc bez straty ogólności jedna firma) mająca wyłączność na danym rynku.

Monopol może być *naturalny* (tak jest np. w przypadu sieci energetycznej), jeśli występują na tyle duże koszty stałe, że nie opłaca się otworzyć drugiej firmy, lub może być spowodowany ograniczeniami wolnej konkurencji. Tak czy inaczej, monopolista działa zawsze na tej samej zasadzie. W odróżnieniu od firmy konkurencyjnej nie jest "price taker" tylko "price maker" – to on ustala ceny, ponieważ ustala podaż rynkową, i jest tego świadom. Podobnie jak w równowadze cząstkowej, zakładamy, że monopolista produkuje tylko jeden produkt i maksymalizuje zysk, tym razem jednak cena nie jest stałą daną z zewnątrz.

Maksymalizacja zysku przez monopolistę ma postać: $\max_{\substack{p>0, y\geq 0\\ d(p)\geq y}} py - c(y)$ – jedynym ograniczeniem jest to, żeby ludzie kupili jego produkcję. Oczywiście wystarczy poprzestać na ograniczeniu $d(p) = y$, gdyż w przeciwnym przypadku monopoliście opłacałoby się podnieść cenę lub wielkość produkcji.

Stąd maksymalizację monopolisty można zapisać równoważnie jako

$$\max_{p>0} p \cdot d(p) - c(d(p))$$

albo

$$\max_{y\geq 0} p(y) \cdot y - c(y) = \max_{y\geq 0} r(y) - c(y),$$

gdzie $p(y) = d^{-1}(y)$ jest odwrotną funkcją popytu, a $r(y) = p(y) \cdot y$ jest to utarg ze sprzedaży. W rzeczywistości warunek $y \geq 0$ można zastąpić $y > 0$, gdyż w przeciwieństwie do firmy wolnokonkurencyjnej monopolista przeważnie ma duże zyski i nie opłaca mu się wstrzymywać produkcji.

Warunek konieczny maksymalizacji zysku ma więc postać $r'(y) = c'(y)$.

**Rysunek 9.1**

Warunek konieczny $r'(y) = c'(y)$, możemy rozpisać jako $p(y)+p'(y)\cdot y = c'(y)$. Ten prosty zapis ma znów łopatologiczną interpretację ekonomiczną: kiedy monopolista rozważa sprzedaż dodatkowo $dy$ produktu, bierze pod uwagę dwa efekty: po pierwsze zwiększenie przychodu o $p(y) \cdot dy$ przez to, że przy tej samej cenie sprzedaje więcej o $dy$; po drugie, aby sprzedać więcej, trzeba zredukować cenę o $dp = \frac{dp}{dy} \cdot dy$, a więc $y$ jednostek zostanie sprzedane za $p'(y) \cdot y \cdot dy$. Razem te dwa efekty dają $p \cdot dy + dp \cdot y = \left(p + \frac{dp}{dy}y\right) dy$ i to musimy przyrównać ze zmianą kosztu produkcji $c'(y) \cdot dy$.

Lewą stronę warunku koniecznego można równoważnie zapisać jako $r'(y) = p(y)\left(1 + \frac{dp}{dy} \cdot \frac{y}{p}\right) = p(y)\left(1 + \varepsilon_{p(y)}(y)\right) = p\left(1 + \frac{1}{\frac{dy}{dp} \cdot \frac{p}{y}}\right) = p\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{y(p)}(p)}\right)$, gdzie $\varepsilon_{y(p)}(p)$ jest *elastycznością cenową popytu* przy cenie $p$, a $\varepsilon_{p(y)}(y)$ *elastycznością odwrotnej funkcji popytu* przy wielkości produkcji $y$.

**Stwierdzenie 9.1.** *Warunek konieczny maksymalizacji zysku przez monopolistę sprzedającego swój produkt bez różnicowania cen można zapisać równoważnie jako:*
*a)* $r'(y) = c'(y)$ *(utarg krańcowy równa się kosztowi krańcowemu);*
*b)* $p(y) + p'(y) \cdot y = c'(y)$*;*
*c)* $p(y)\left(1 + \varepsilon_{p(y)}(y)\right) = c'(y)$*;*
*d)* $p\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{y(p)}(p)}\right) = c'(y(p))$.

Z warunku d) wynika fakt, że monopolista nigdy nie wybierze ceny, takiej, że popyt przy tej cenie jest nieelastyczny ($\left|\varepsilon_{y(p)}(p)\right| < 1$): wówczas lewa strona – utarg krańcowy – byłaby ujemna, a prawa jest zawsze dodatnia. Tak więc cena i wielkość produkcji będą takie, że popyt jest przy tej cenie elastyczny. Ekonomicznie jest to oczywiste: nieelastyczny popyt oznacza, że ludzie "słabo" reagują obniżeniem popytu na zmianę ceny, więc niemalże bezkarnie można cenę podnieść.

**9.1. Monopol a doskonała konkurencja.** Dla uproszczenia analizy założymy, że koszt produkcji jest liniowy (wówczas tyle samo kosztuje wyprodukowanie tej samej ilości towarów przez 1 firmę i przez $N$ firm): $c(y) = C \cdot y$.

Przy wolnej konkurencji ustali się cena $C$ i ilość dobra na rynku będzie dana równaniem $p(y) = C$. Natomiast w przypadku monopolu wielkość produkcji to $r'(y) = C$, czyli $p(y) + p'(y) \cdot y = C$. Ilość będzie mniejsza niż w przypadku doskonałej konkurencji, a cena wyższa. Podobnie jak w przypadku opodatkowania mamy do czynienia z bezpowrotną stratą spowodowaną zmniejszeniem produkcji: Nadwyżka monopolisty jest mniejsza niż to co tracą konsumenci.

**Rysunek 9.2**

**9.2. Dyskryminacja cenowa.** Dyskryminacja cenowa polega na sprzedawaniu różnych jednostek tego samego dobra po różnych cenach (tym samym lub różnym konsumentom). Może być stosowane przy pewnych warunkach przez monopolistę, który chce sprzedać dodatkową jednostkę dobra bez obniżenia ceny sprzedaży dotychczasowych.

Są trzy podstawowe rodzaje dyskryminacji cenowej:

**I-ego rodzaju**: (doskonała dyskryminacja cenowa)
każdemu sprzedajemy każdą jednostkę dobra za maksymalną cenę, jaką jest skłonny

za nią zapłacić (tak jakby każda jednostka była sprzedawana na aukcji, przy założeniu, że każdy podaje maksymalną cenę).

W tej sytuacji monopolista zgarnia całą nadwyżkę, a wielkość produkcji jest jak w przypadku wolnej konkurencji i łączna nadwyżka jest taka sama (nie ma więc bezpowrotnej straty – społecznie sytuacja jest lepsza niż brak dyskryminacji). Oczywiście monopolista musi znać strukturę popytu, dlatego jest to sytuacja abstrakcyjna.

**Rysunek 9.3**

**II-ego rodzaju**: (tzw. nieliniowa wycena)
cena zależy od liczby zakupionych jednostek dobra (np. obniżka za hurt albo wyższe opłaty za energię elektryczna po przekroczeniu pewnego pułapu).

Jeżeli konsumenci dzielą się na dwie grupy (lub więcej), jedna z nich ma wyższy popyt przy każdej cenie, a druga niższy i nie można na podstawie innych cech wykryć, kto należy do której grupy. Stąd za małą ilość jest inna cena niż za dużą.

**III-ego rodzaju**
każdy konsument płaci taką samą cenę za każdą jednostkę dobra, ale różnicujemy pomiędzy konsumentami (np. zniżki dla studentów).

Jeżeli konsumenci dzielą się na dwie grupy (lub więcej), jedna z nich ma wyższy popyt przy każdej cenie, a druga niższy i na podstawie innych cech (np. student, emeryt, mieszkaniec określonego miasta) łatwo wykryć, kto należy do której grupy – łatwo ustalić optymalne ceny dla każdej grupy.

**Przykład 9.2.** *W dolinie zagubionej wśród szczytów Himalajów są tylko dwie wioski A i B. Chociaż nie ma administracyjnych ograniczeń konkurencji, ze względu na wysokie koszty transportu alkoholu spoza doliny, w dolinie monopol na sprzedaż alkoholu ma lokalna gorzelnia. Jej funkcja kosztów to* $c(y) = y^2$. *Popyt na alkohol w wiosce A wynosi* $d_A(p) = 200 - p$, *a w wiosce B* $d_B(p) = 300 - p$.

*a) Jeśli monopolista może traktować wioski A i B jako oddzielne rynki zbytu (dyskryminacja cenowa trzeciego rodzaju), to jaka będzie cena i ilość konsumowanego alkoholu w każdej z wiosek?*

*b) Jeśli mieszkańcy są na tyle spostrzegawczy i przedsiębiorczy, że zawsze kupują alkohol tam, gdzie taniej, to jak zmieni się odpowiedź?*

*c) Pewien przedsiębiorczy Sherpa poinformował sąsiadów, że sam zamierza zacząć pędzić bimber (równie dobry jak produkt gorzelni) i sprzedawać go po cenie 200, bliskiej jego kosztom produkcji. Jak zareaguje monopolista?*

*a) Mamy tu do czynienia z dyskryminacją cenową trzeciego rodzaju. Maksymalizacja monopolisty ma postać* $\max_{p_A>0,\ p_B>0} d_A(p_A) \cdot p_A + d_B(p_B) \cdot p_B - c(d_A(p_A) + d_B(p_B))$ *albo, równoważnie.* $\max_{y_A>0,\ y_B>0} y_A \cdot p_A(y_A) + y_B \cdot p_B(y_B) - c(y_A + y_B)$, *gdzie* $p_A(\cdot)$ *i* $p_B(\cdot)$ *oznaczają odwrotne funkcje popytu w obu wioskach.*

*b) Monopolista nie może dyskryminować cenowo, więc ustali się wspólna cena wynikająca z maksymalizacji* $\max_{p>0}(d(p)) \cdot p - c(d(p))$, *gdzie* $d(p) = d_A(p) + d_B(p)$

*jest funkcją łacznego popytu; albo, równoważnie,* $\max_{y>0} y \cdot p(y) - c(y)$, *gdzie* $p(\cdot)$ *jest funkcją odwrotną do* $d$. *W obu przypadkach* $y_i = y_i(p)$.

*c) O ile monopolista nadal będzie miał zysk, obniży cenę do poziomu, przy którym ewentualnemu konkurentowi nie będzie się opłacało produkować. Wielkość produkcji zależy od popytu – na pewno zwiększy się. Jeżeli zagrożenie konkurencją zniknie, monopolista znów podniesie cenę i zmniejszy produkcję.*

## 10. Wybór w warunkach niepewności

Dotychczas rozważaliśmy sytuacje wyboru, w których wszystko było deterministyczne. W rzeczywistości większość ważnych decyzji podejmowanych jest w sytuacjach, gdzie wynik podjętej decyzji jest niepewny. Podejmiemy próbę modelowania takich sytuacji.

Niech $\mathbb{C}$ oznacza *zbiór* wszystkich możliwych *wyników* (np. $\mathbb{C} = \mathbb{X} = \mathbb{R}^n_+$ – zbiór wszystkich koszyków konsumpcji, które mogą być dostępne konsumentowi; $\mathbb{C} = \mathbb{R}$ – stan konta albo, ogólniej wartość posiadanego majatku). Na zbiorze $\mathbb{C}$ (na razie jeszcze wszystko jest deterministyczne) mamy zdefiniowaną racjonalną relację preferencji podejmującego decyzje.

**Definicja 10.1.** Loterią prostą *nazwiemy dowolny rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze* $\mathbb{C}$.

*Jeśli mamy loterie proste* $L_k$ *dla* $k = 1, \ldots, K$ *i liczby nieujemne* $\alpha_k$ *sumujące się do* 1, *to układ* $(L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ *nazywamy* loterią złożoną.

*Zbiór wszystkich loterii oznaczymy przez* $\mathcal{L}$.

Loteria złożona jest to pewien rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze składających się na nią loterii prostych – loteria, w której zbiorem możliwych wyników są loterie.

Każdy element zbioru $\mathbb{C}$ możemy utożsamić z trywialną loterią prostą skoncentrowaną na tym wyniku.

Będziemy chcieli umieć porównywać różne loterie zdefiniowane na zbiorze $\mathbb{C}$.

Jeżeli $\mathbb{C}$ jest zbiorem skończonym $\{c_1, \ldots, c_n\}$ to loterię prostą możemy utożsamić ze zbiorem prawdopodobieństw $\{p_1, \ldots, p_n\}$, gdzie $p_i$ jest prawdopodobieństwem tego, że wynik będzie $c_i$. W tej sytuacja loteria ma prostą interpretację geometryczną jako punkt sympleksu $(n-1)$-wymiarowego.

W rzeczywistości, jeśli nawet mamy loterię, której wynikami są loterie proste, najbardziej interesuje nas, jakie jest faktyczne prawdopodobieństwo wyników $c_i$. Jeżeli mamy loterię złożoną o składowych $L_k = \{p_1^k, \ldots, p_n^k\}$, to faktyczne prawdopodobieństwo $c_i$ jest równe $p_i = \sum_{k=1}^K \alpha_i \cdot p_i^k$.

Ze względu na prostotę będziemy się na razie zajmować sytuacjami, kiedy zbiór $\mathbb{C}$ jest skończony, jednakże wyniki przenoszą się na większe zbiory.

Podobnie jak w przypadku relacji preferencji w ogólnej teorii wyboru, chcemy aby na zbiorze wszystkich loterii (prostych i złożonych) była zdefiniowana pewna racjonalna relacja preferencji $\succeq$. Aby miała ona sens, na loteriach trywialnych musi się pokrywać z relacją preferencji na zbiorze wyników. Oprócz tego będą nas interesować nas pewne szczególne własności tej relacji.

**Definicja 10.2.** *Mówimy, że relacja* $\succeq$ *na* $\mathcal{L}$ *jest* ciągła, *jeśli* $\forall L, L', L'' \in \mathcal{L}$ *zbiory* $\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succeq L''\}$ *i* $\{\alpha \in [0,1] : L'' \succeq \alpha L + (1-\alpha)L'\}$ *są domknięte.*

*Mówimy, że relacja* $\succeq$ *na* $\mathcal{L}$ *spełnia* aksjomat niezależności, *jeśli* $\forall L, L', L'' \in \mathcal{L}$ $\alpha \in (0,1)$ *zachodzi tożsamość* $L \succeq L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1-\alpha)L''$.

Teraz przyjmiemy, że istnieje funkcja użyteczności odzwierciedlająca te preferencje – funkcja użyteczności na loteriach $U$.

**Definicja 10.3.** *Mówimy, że funkcja użyteczności* $U$ *na* $\mathcal{L}$ *jest* funkcją użyteczności von Neumanna-Morgensterna *(*funkcją użyteczności oczekiwanej*), jeżeli odzwierciedla relację preferencji na* $\mathcal{L}$ *i istnieje taka funkcja użyteczności na wynikach* $u$*, że dla każdej loterii prostej* $L$ *jest równa wartości oczekiwanej przy rozkładzie danym loterią* $L$ *z* $u$ *(czyli* $U(L) = E_L u$*).*

W przypadku skończonego zbioru $\mathbb{C}$, funkcja użyteczności von Neumanna-Morgensterna spełnia $U(L) = p_1 u(c_1) + \cdots + p_n u(c_n)$.

**Stwierdzenie 10.4.** a*) Jeżeli* $U$ *jest funkcją użyteczności von Neumanna-Morgensterna, to dla każdego* $a > 0, b \in \mathbb{R}$ *funkcja* $a \cdot U + b$ *też jest funkcją użyteczności von Neumanna-Morgensterna.*

*b) Jeżeli* $U_1$ *i* $U_2$ *są funkcjami użyteczności von Neumanna-Morgensterna, to istnieje takie* $a > 0$ *i* $b \in \mathbb{R}$*, że* $U_1 = a \cdot U_2 + b$*.*

*c) Jeżeli istnieje funkcja użyteczności von Neumanna-Morgensterna, to relacja preferencji jest ciągła i spełnia aksjomat niezależności.*

**Twierdzenie 10.5.** *(*o użyteczności oczekiwanej*)*

*Jeżeli relacja preferencji jest ciągła i spełnia aksjomat niezależności, to istnieje funkcja użyteczności von Neumanna-Morgensterna.*

**Przykład 10.6.** Paradoks Allais

*Porównajmy loterie A i B i określmy, którą z nich wolimy:*

*A: 1 mln z prawdopodobieństwem* 1;

*B. 5 mln z prawdopodobieństwem* 0.1, *1 mln z prawdopodobieństwem* 0.89, *nic z prawdopodobieństwem* 0.01.

*Zapiszmy wynik i zapomnijmy o nim. Teraz porównajmy loterie C i D:*

*C. 1 mln z prawdopodobieństwem* 0.11, *nic z prawdopodobieństwem* 0.89;

*D. 5 mln z prawdopodobieństwem* 0.1, *nic z prawdopodobieństwem* 0.9.

*Znaczna większość osób (w zależności od tego, czy to matematycy, czy gospodynie domowe i czy wiedzą, że to paradoks, może to dochodzić nawet do* 100%!*) wybiera parę loteri (A,D) – są one dla nich ściśle lepsze. Jeśli założymy, że mają funkcję użyteczności von Neumanna-Morgensterna, można to zapisać jako układ nierówności z trzema niewiadomymi:*

$$\begin{cases} u(1) > 0.1 \cdot u(5) + 0.89 \cdot u(1) + 0.01 \cdot u(0), \\ 0.11 \cdot u(1) + 0.89 \cdot u(0) < 0.1 \cdot u(5) + 0.9 \cdot u(0). \end{cases}$$

*Jak łatwo sprawdzić, ten układ jest sprzeczny.*

Tak więc z bardzo oczywistych założeń (pierwotnie był to system pięciu prostych aksjomatów von Neumanna i Morgensterna, jeszcze bardziej oczywistych), wynika istnienie funkcji użyteczności von Neumanna-Morgensterna, która jak widać z paradoksu Allais, nie zawsze odzwierciedla nasze preferencje. Niemniej jednak odtąd będziemy zakładać, że taka funkcja istnieje.

Zobaczymy, co przy tym założeniu można wyliczyć. Przeanalizujemy, za ile mimalnie właściciel byłby skłonny sprzedać ryzykowny aktyw.

**Przykład 10.7.** *Kapitan Kid zdobył mapę, która z prawdopodobieństwem 0.75 zaprowadzi go do skarbu o wartości 160 tysięcy gwinei. Inny pirat zaproponował, że odkupi mapę i wyłączne prawo do skarbu. Za jaką minimalną cenę Kid będzie skłonny je sprzedać, jeśli jego funkcja użyteczności na zbiorze możliwych wyników jest postaci $u(x) = \sqrt{x}$. Zakładamy, że Kid ma funkcję użyteczności von Neumanna-Morgensterna na loteriach i że nie ma innego majątku?*

*Minimalna cena, za jaką Kid jest skłonny sprzedać mapę, to cena, przy której jego użyteczność od sprzedaży po tej cenie zrównuje się użytecznością loterii "nie sprzedać", czyli taka cena $P$, dla której $1 \cdot \sqrt{P} = 0.25 \cdot \sqrt{0} + 0.75 \cdot \sqrt{160000}$.*

Podobnie ma się sytuacja, kiedy decydujemy się na kupno ubezpieczenia – jaka maksymalnie może być jego cena:

**Przykład 10.8.** *Sokrates jest właścicielem domu o wartości 200 talentów, poza ma jeszcze żonę Ksantypę, którą wycenia na 25. Dom może spłonąć z prawdopodobieństwem równym 0.02, ale Ksantypa na pewno zdąży uciec. Ile maksymalnie Sokrates będzie skłonny zapłacić za pełne ubezpieczenie domu, jeśli jego funkcja użyteczności na zbiorze możliwych wyników jest postaci $u(x) = \sqrt{x}$? Zakładamy, że nie może kupić ubezpieczenia pokrywającego tylko część szkody.*

*Wykupienie pełnego ubezpieczenia oznacza, że jego majątek będzie wynosił na pewno $225 - P$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie porównujemy, kiedy obie użyteczności się zrównają.*

**10.1. Stosunek do ryzyka.** Teraz będziemy zajmować się sytuacją, gdy $\mathbb{C} = \mathbb{R}$, co będzie oznaczać możliwe wartości posiadanego majątku. Teraz będziemy utożsamiać loterię (czyli rozkład) z jej dystrybuantą (funkcja $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ taka że $F(x)$ – prawdopodobieństwo, że będziemy mieć nie więcej niż $x$). Dalej zakładamy, że preferencje na zbiorze loterii są wyznaczone przez funkcję użyteczności von Neumanna-Morgensterna $U$ – czyli istnieje taka funkcja $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nazywana czasem *funkcją użyteczności Bernoulliego*), że $U(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dF(x)$ (całka Stieltiesa) wyznacza preferencje. O funkcji $u$ będziemy zakładać, że jest ściśle rosnąca, ograniczona i ciągła.

**Definicja 10.9.** *Podejmujący decyzję* jest niechętny ryzyku *(ma* awersję do ryzyka*), jeśli dla każdej loterii $F$ wartość oczekiwana $F$ jest niegorsza niż $F$.*

*Podejmujący decyzję* lubi ryzyko *(jest* miłośnikiem ryzyka, *ma* skłonność do ryzyka*), jeśli dla każdej loterii $F$, $F$ jest niegorsza niż wartość oczekiwana $F$.*

*Podejmujący decyzję* jest obojętny w stosunku do ryzyka, *jeśli dla każdej loterii $F$ wartość oczekiwana $F$ jest równie dobra jak $F$.*

Wyrażone przy pomocy funkcji użyteczności von Neumanna-Morgensterna, definicje te mają postać:

niechęć do ryzyka: $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dF(x) \leq u\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(x)dF(x)\right)$;

miłość do ryzyka: $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dF(x) \geq u\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(x)dF(x)\right)$;

obojętność wobec ryzyka: $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dF(x) = u\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(x)dF(x)\right)$.

**Twierdzenie 10.10.** *Niechęć do ryzyka jest równoważna wklęsłości $u$, miłość – wypukłości, a obojętność – liniowości funkcji $u$.*

Żeby lepiej zrozumieć koncepcje niechęci i miłości do ryzyka zauważmy następujące fakty:

**Stwierdzenie 10.11.** *a) Jeżeli ubezpieczenie jest aktuarialnie fair (wartość składki jest równa wartości oczekiwanej szkody), to osoba niechętna ryzyku wykupi pełne ubezpieczenie.*

*b) Jeżeli osoba niechętna ryzyku rozważa inwestycję w aktyw ryzykowny i pewny, przy czym aktyw ryzykowny ma wyższą wartość oczekiwaną stopy zwrotu niż stopa zwrotu z aktywu pewnego, to zainwestuje pewną większą od zero część pieniędzy w aktyw ryzykowny.*

*c) Jeżeli ubezpieczenie jest aktuarialnie fair lub jest droższe, to osoba skłonna do ryzyka nie ubezpieczy się wcale.*

*d) Jeżeli mamy aktyw ryzykowny i pewny, przy czym stopa zwrotu z aktywu pewnego jest wyższa niż wartość oczekiwana stopy zwrotu aktywu ryzykownego, wówczas nie można powiedzieć, w który z aktywów zainwestuje miłośnik ryzyka.*

Punkt b wydaje się w pierwszej chwili zaskakujący. Okazuje się, że większość inwestorów giełdowych jest niechętna ryzyku! Inwestują niewielką część swego majątku w akcje, bo akcje mają większą oczekiwaną stopę zwrotu niż aktywa pewne. Osoby mające skłonność do ryzyka na pewno nie wykupią żadnego nieobowiązkowego ubezpieczenia (żadne z nich nie jest aktuarialnie fair i to z grubym okładem). Większość ludzi ma awersję do ryzyka. Kto więc ma skłonność do ryzyka? Analiza danych wykazuje, że, przynajmniej na małą skalę, klienci totolotka, a na większą skalę firm oferujących samochody na raty z wcześniejszym wykupem w drodze losowania – płacą średnio o $\frac{1}{3}$ wartości samochodu więcej (to akurat dowcip: ci ludzie zazwyczaj nie liczyli żadnej wartości oczekiwanej ani zdyskontowanego strumienia płatności, więc nawet nie wiedzą, o ile więcej zapłacili).

Możemy oceniać loterie porównując je z sytuacjami pewnymi (jak w powyższych przykładach).

**Definicja 10.12.** Odpowiednikiem pewnym loterii $F$ *dla o soby o funkcji Bernoulliego $u$ nazywamy taką liczbę $c(F,u)$, że $u(c(F,u)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dF(x)$.*

**Stwierdzenie 10.13.** *Niechęć do ryzyka jest równoważna $c(F,u) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x)$, miłość $c(F,u) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x)$, a obojętność $c(F,u) = \int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x)$.*

**Mierzenie niechęci do ryzyka.** Jeżeli mamy dwie różne osoby to chcielibyśmy móc porównać ich niechęć do ryzyka. Będziemy zakładać, że funkcje użyteczności Bernoulliego są dwukrotnie różniczkowalne.

**Definicja 10.14.** Współczynnik Arrowa-Pratta bezwzględnej awersji do ryzyka*: $r_A(x,u) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}$.*

Jeżeli $r_A$ jest dla każdego $x$ większe przy $u_2$ niż przy $u_1$ to $u_2$ oznacza większą awersję do ryzyka:

**Twierdzenie 10.15.** *Dla dwóch podejmujących decyzje o funkcjach użyteczności Bernoulliego $u_1$ i $u_2$, następujące warunki są równoważne:*

*a) $\forall x\ r_A(x,u_1) \leq r_A(x,u_1)$,*

*b) istnieje taka funkcja wklęsła rosnąca $f$, że $u_2 = f \circ u_1$,*

*c) $\forall F\ c(F,u_2) \leq c(F,u_1)$.*

**Stwierdzenie 10.16.** *Jeżeli rozważamy inwestycję w aktyw ryzykowny i pewny, przy czym aktyw ryzykowny ma wyższą wartość oczekiwaną stopy zwrotu niż stopa zwrotu z aktywu pewnego, osoba o większej awersji do ryzyka zainwestuje mniejszą część pieniędzy w aktyw ryzykowny.*

Stosunek do ryzyka zmienia się nie tyko ze zmianą funkcji $u$, ale też ze zmianą wielkości posiadanego majątku: często ci sami ludzie, jeśli są bogaci, są skłonni wziąć udział w loteri, w której ich majątek zmieni się o pewną zmienną losową $X$, podczas gdy są biedni, nie wezmą udziału w takiej loterii – ponieważ straty, jakie może przynieść $X$, stanowią większą część ich majątku. W tym przypadku lepiej porównywać *względną awersję do ryzyka.*

**Definicja 10.17.** Współczynnik Arrowa-Pratta względnej awersji do ryzyka*: $r_R(x,u) = \frac{-x \cdot u''(x)}{u'(x)}$.*

Przy ustalonym $u$ porównujemy $r_R(x,u)$ dla różnych $x$ – wówczas możemy sprawdzić, czy mamy do czynienia z *malejącą względną awersją* do ryzyka.

**Porównywanie loterii.**

**Definicja 10.18.** *Loteria $F$ dominuje stochastycznie pierwszego rzędu $G$, jeśli dla każdej funkcji rosnącej $u$ $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dF(x) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dG(x)$ ($F$ jest wybierane przez wszystkich racjonalnych konsumentów – tych dla których więcej znaczy lepiej).*

**Twierdzenie 10.19.** *Loteria $F$ dominuje stochastycznie pierwszego rzędu $G$, jeśli $F(x) \leq G(x)$ dla każdego $x$.*

**Przykład 10.20.** *Porównajmy loterię $F$ z loterią złożoną $G$ będącą złożeniem loterii o tym samym rozkładzie $F$ na zbiorze loterii $\{H_x : x \in \mathbb{R}\}$, takich że każda loteria $H_x$ ma rozkład skoncentrowany na $[x, +\infty)$. Wówczas $G$ dominuje stochastycznie pierwszego rzędu $F$:*

$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dG(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y)dH_x(y)dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x+z)dH_x(x+z)dF(x) \geq$
$\geq \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dF(x)$.

**Definicja 10.21.** *Loteria $F$ dominuje stochastycznie drugiego rzędu $G$, jeśli dla każdej funkcji rosnącej, wklęsłej $u$ $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dF(x) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dG(x)$ ($F$ jest wybierane przez wszystkich racjonalnych konsumentów niechętnych ryzyku).*

Przeważnie w ten sposób porównuje się loterie o tej samej wartości oczekiwanej, dlatego czasem umieszcza się warunek równości wartości oczekiwanych w definicji.

**Przykład 10.22.** *Prównajmy loterie $L_1$ – wykupienie pełnego ubezpiecznia domu i $L_2$ – wykupienie tylko niepełnego ubezpieczenia pokrywającego $q\%$ straty za $q\%$ ceny pełnego ubezpieczenia. Loterie te mogą mieć taką samą wartość oczekiwaną (jeśli ubezpieczenie jest aktuarialnie fair), lub $L_2$ ma wyższą wartość oczekiwaną (jeżeli wielkość składki jest wyższa niż wartość oczekiwana straty).*

*a) Jeżeli ubezpieczenie jest aktuarialnie fair, to loteria $L_1$ dominuje stochastycznie drugiego rzędu $L_2$.*

*b) Jeżeli wielkość składki jest wyższa niż wartość oczekiwana straty, to nie ma żadnej dominacji stochastycznej – można tak dobrać rosnące wklęsłe funkcje użyteczności, żeby uzyskać nierówności w obie strony.*

**Twierdzenie 10.23.** *Loteria $F$ dominuje stochastycznie drugiego rzędu $G$, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $x$ zachodzi równość $\int_{-\infty}^{x} G(t)dt \geq \int_{-\infty}^{x} F(t)dt$.*

**Przykład 10.24.** *Porównajmy loterię $F$ z loterią złożoną $G$ będącą złożeniem loterii o tym samym rozkładzie $F$ na zbiorze loterii $\{H_x : x \in \mathbb{R}\}$, takich że każda loteria $H_x$ ma rozkład o wartości oczekiwanej $x$. Wówczas $F$ dominuje stochastycznie pierwszego rzędu $G$.*

Z nierówności Jensena:

$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dG(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y)dH_x(y)dF(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} u\left(\int_{-\infty}^{+\infty} ydH_x(y)\right) dF(x) =$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dF(x)$.