WAS, zadania na trzecią kartkówkę

We wszystkich zadaniach poniżej, $(W_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera.

1. Wykazać, że proces $\left(tW_t - \int_0^t W_s \mathrm{d}s\right)_{t\geq 0}$ jest martyngałem.

2. Dana jest funkcja $h \in L^2([0,T])$, $T < \infty$. Niech $X_t = \int_0^t h(s)\mathrm{d}W_s$ oraz $Y_t = \int_0^t h^2(s)\mathrm{d}s$ dla $t \leq T$. Udowodnić, że proces $\big(\exp(X_t - Y_t/2)\big)_{t\in[0,T]}$ jest martyngałem.

3. Wykazać, że proces $X = \big(W_{\sqrt{t}} I_{(1,2)}(t)\big)_{t\geq 0}$ należy do $\mathcal{L}_3^2$. Dla $t, s \in [1,2]$, obliczyć $\mathbb{E}X_t$ oraz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$.

4. Dana jest funkcja $h : [0,1] \to \{-1, 1\}$. Wykazać, że $X = \left(\int_0^t h(s)\mathrm{d}W_s\right)_{t\in[0,1]}$ jest procesem Wienera.

5. Wyznaczyć rozkład zmiennej $\int_0^5 e^{-2s}\mathrm{d}W_s$ i przedstawić ją w postaci niezawierającej całek stochastycznych.

6. Wyznaczyć granicę w $L^2(\Omega)$ ciągu zmiennych

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} + W_{(k+1)/n}\right)(W_{(k+1)/n} - W_{k/n}), \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots.$$

7. Niech $X_t = \int_0^t s^3 W_s \mathrm{d}W_s$, $t \geq 0$. Obliczyć $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$.

8. Udowodnić, że dla $t \geq 0$ zachodzi równość $3\int_0^t W_s^2 \mathrm{d}W_s = W_t^3 - 3tW_t$.