

WAS, zadania na pierwszą kartkówkę

We wszystkich zadaniach poniżej, $(W_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera.

1. Obliczyć $\mathbb{P}(2W_1^2 - 2W_1W_2 + W_2^2 \geq 1)$.

Wskazówka: Istnieje rozwiązanie, które unika rachunków: użyć rozkładu gamma.

2. Obliczyć $\mathbb{E}(W_3W_2|W_4)$.

3. Niech $V = (V_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Wienera niezależnym od W oraz niech α będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Udowodnić, że proces $(\sin \alpha \cdot W_t + \cos \alpha \cdot V_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera.

4. Wykazać, że proces $X_t = \int_0^t W_s ds$, $t \geq 0$, jest procesem gaussowskim i obliczyć jego funkcję kowariancji.

5. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że proces Wienera przyjmie wartość wymierną dla pewnego $t \in \mathbb{Q}_+$.

6. Zmienna losowa τ jest niezależna od procesu Wienera W i ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznaczyć rozkład zmiennej W_τ .

Wskazówka: Można np. obliczyć funkcję charakterystyczną.

7. Procesy $X = (X_t)_{t \geq 0}$, $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ mają prawostronnie ciągłe trajektorie i te same rozkłady skończenie wymiarowe.

a) Wykazać, że jeśli X przyjmuje z prawdopodobieństwem 1 wyłącznie wartości całkowite, to Y także ma tę własność.

b) Wykazać, że jeśli $\limsup_{t \rightarrow 3^-} X_t \geq 5$ p.n., to $\limsup_{t \rightarrow 3^-} Y_t \geq 5$ p.n..

8. Proces $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ jest gaussowski i spełnia warunek $\mathbb{E}X_t = 0$ dla każdego $t \in [0, 1]$. Ponadto, dla wszystkich $s, t \in [0, 1]$,

$$|\text{Cov}(X_s, X_t) - \text{Cov}(X_t, X_t)| \leq 5|s - t|.$$

Wykazać, że X posiada modyfikację ciągłą.

9. Niech $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$. Czy zbiór

$$\{x \in \mathcal{X} : \lim_{t \downarrow 0} x(t) = 0 \text{ oraz } x(s) \geq 0 \text{ dla } s \in [9, 10]\}$$

należy do σ -ciała generowanego przez zbiory cylindryczne? Jaka będzie odpowiedź, jeśli weźmiemy $\mathcal{X} = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ (funkcje ciągłe na \mathbb{R}_+)?

10. Wykazać, że procesy $((1-t)W_{t/(1-t)})_{0 \leq t \leq 1}$ oraz $(tW_{t-1-1})_{0 \leq t \leq 1}$ mają ten sam rozkład (na odpowiednim σ -ciele zbiorów cylindrycznych).

11. Wykazać, że

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \log \left[\int_0^t \exp(W_s) ds \right]$$

zbiega według rozkładu, gdy $t \rightarrow \infty$, do zmiennej losowej $W_1^* = \sup_{0 \leq s \leq 1} W_s$.

Wskazówka. Jeśli f jest nieujemną funkcją ciągłą na $[0, 1]$, to

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f(u)^p du \right)^{1/p} = \sup_{[0,1]} f.$$

Warto też skorzystać z tego, że $(u^{-1/2}W_{tu})_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera.