WAS, zadania na drugą kartkówkę

We wszystkich zadaniach poniżej, $(W_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera.

1. Niech τ, σ będą dwoma momentami zatrzymania. Czy $\mathcal{F}_\tau \cup \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\tau\vee\sigma}$?

2. Dla dowolnej liczby naturalnej n, τ_n jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Niech $\tau = \limsup_{n\to\infty} \tau_n$.
a) Udowodnić, że τ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$.
b) Czy τ musi być momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$?

3. Niech $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ będzie filtracją generowaną przez $(W_t)_{t\geq 0}$ i niech $\tau = \inf\{t \geq 0 : W_t > 1\}$. Czy τ jest momentem zatrzymania względem a) $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, b) $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$?

4. Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1, równość

$$W_t^4 = W_t^3 - 3W_t^2 + 1$$

zachodzi dla nieskończenie wielu $t \geq 0$, ale nie zachodzi dla żadnego $t \in \mathbb{Q}_+$.

5. Proces $X = (X_t)_{t\geq 0}$ jest ciągłym martyngałem względem $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ i ma tę własność, że $(X_t^2)_{t\geq 0}$ jest nadmartyngałem względem $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Wykazać, że X jest stały p.n.

6. Wykazać, że proces $(W_t^3 - 3tW_t)_{t\geq 0}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji.

7. Załóżmy, że $(X_t)_{t\geq 0}$ jest procesem o ciągłych trajektoriach takim, że $X_0 = 0$, $\limsup_{t\to\infty} |X_t| = \infty$ p.n. oraz $(X_t^7)_{t\geq 0}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji. Określmy $\tau_a = \inf\{t : X_t = a\}$ dla $a \in \mathbb{R}$. Uzasadnić, że dla $a, b > 0$ zachodzi $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b^7}{a^7+b^7}$.

8. Niech $(N_t)_{t\geq 0}$ będzie procesem Poissona z parametrem 1, a $(W_t)_{t\geq 0}$ - procesem Wienera (oba procesy są adaptowane do pewnej wspólnej filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$). Niech $\tau = \inf\{t : N_t = W_t^2 + 1\}$. Udowodnić, że $\mathbb{E}\tau = \infty$.

9. Dla $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, niech $\sigma_{a,b} = \inf\{t \geq 0 : W_t = at + b\}$. Wykazać, że

$$\mathbb{P}(\sigma_{a,b} < \infty) = \exp(-2b^+ a)$$

($b^+ = \max\{b, 0\}$). Wywnioskować stąd, że przy ustalonym $\lambda > 0$, zmienna $Y = \sup_{t\geq 0}(W_t - \lambda t)$ ma rozkład wykładniczy z parametrem 2λ.