WAS, zadania na trzecią kartkówkę

We wszystkich zadaniach poniżej, $(W_t)_{t\geq 0}$ to standardowy jednowymiarowy proces Wienera.

1. Korzystając ze wzoru Itô, udowodnić, że
a) $(W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2)_{t\geq 0}$ jest martyngałem,
b) $(W_t^5 - 10tW_t^3 + 15t^2W_t)_{t\geq 0}$ jest martyngałem.

2. Zapisać procesy
a) $X_t = (2 + t + tW_t)_{t\geq 0}$,
b) $Y_t = (W_t^{(1)} \sin W_t^{(2)})_{t\geq 0}$ (gdzie $W_t^{(1)}$, $W_t^{(2)}$ to niezależne procesy Wienera)
w postaci sumy lokalnego martyngału oraz procesu o wahaniu ograniczonym.

3. Niech T będzie ustaloną liczbą dodatnią. Dla $a \in \mathbb{R}$, zdefiniujmy proces $H = (W_s \cdot (T-s)^a 1_{\{s<T\}})_{s\geq 0}$. Rozstrzygnąć, dla jakich wartości a proces H należy do $\mathcal{L}_T^2$, a dla jakich a proces H należy do Λ_T^2.

4. Dla $t \geq 0$ zdefiniujmy $X_t = \int_0^t sW_s^2 \mathrm{d}W_s$. Wykazać, że X jest martyngałem całkowalnym z kwadratem i wyznaczyć nawias skośny procesów X oraz $\left(\int_0^t W_s \cos s \,\mathrm{d}X_s\right)_{t\geq 0}$.

5. Dany jest proces $X = \left(\int_0^t e^{W_s^2}\mathrm{d}W_s\right)_{t\geq 0}$. Wykazać, że X jest martyngałem lokalnym. Przedstawić proces $Y = (\int_0^t W_s^5 \mathrm{d}X_s)_{t\geq 0}$ w postaci całki względem procesu Wienera. Wykazać, że dla pewnego $\varepsilon > 0$, proces $(Y_t)_{t\in[0,\varepsilon]}$ jest martyngałem.

6. Załóżmy, że M jest ciągłym martyngałem lokalnym startującym z zera. Dla ustalonego $a > 0$, niech $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : |M_t| > a\}$. Wykazać, że dla każdego $t \geq 0$ zachodzi nierówność

$$a^2\mathbb{P}(\tau_a \leq t) \leq \mathbb{E}\langle M\rangle_{\tau_a\wedge t}.$$

7. Wykazać, że ciąg

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(W_{(k+1)/n}^2 - W_{k/n}^2 - \frac{1}{n}\right)\left(W_{(k+1)/n} - W_{k/n}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny w L^1 i wyznaczyć jego granicę.

8. Wykazać, że dla dowolnego ciągłego martyngału lokalnego M startującego z zera, proces $(M_t^3 - 3M_t\langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ jest lokalnym martyngałem i wywnioskować stąd, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ,

$$\mathbb{E}M_\tau^3 \leq 3\left(\mathbb{E}\sup_{t\leq\tau} M_t^3\right)^{1/3}\left(\mathbb{E}\langle M\rangle_\tau^{3/2}\right)^{2/3}.$$

9. Ciągły martyngał lokalny M startuje z zera i spełnia warunek $\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t = \infty\right) = 1$. Załóżmy, że $H \in \Lambda_{\infty,M}^2$ jest procesem prognozowalnym spełniającym warunek $|H_t| \geq 1$ dla wszystkich t. Niech $\tau = \inf\left\{t : \int_0^t H_s \mathrm{d}M_s = 1\right\}$. Wykazać, że $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

Wskazówka: Proces $\left(\int_0^t H_s dM_s\right)_{t\geq 0}$ jest martyngałem lokalnym. Obliczyć jego nawias skośny i wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 zbiega on do nieskończoności gdy $t \to \infty$.

10. Nieujemny martyngał lokalny M spełnia warunek $\mathbb{E}M_t = \mathbb{E}M_0$ dla wszystkich t. Wykazać, że M jest martyngałem.

11. Wyznaczyć proces X spełniający równanie

$$\mathrm{d}X_t = -X_t \mathrm{d}t + e^{-t}\mathrm{d}W_t, \qquad t > 0,$$

oraz warunek $X_0 = 1$.

12. Dla $x > 0$ i $t \geq 0$, zdefiniujmy $X_t = (x^{1/3} + \frac{1}{3}W_t)^3$. Wykazać, że

$$\mathrm{d}X_t = \frac{1}{3}X_t^{1/3}\mathrm{d}t + X_t^{2/3}\mathrm{d}W_t, \qquad t \geq 0.$$

Określmy $\tau = \inf\{t : X_t = 0\}$ i niech $Y_t = X_t 1_{\{\tau > t\}}$. Wykazać, że Y także jest rozwiązaniem powyższego stochastycznego równania różniczkowego.