WAS, zadania na drugą kartkówkę

We wszystkich zadaniach poniżej, $(W_t)_{t\geq 0}$ to standardowy jednowymiarowy proces Wienera.

1. Wyznaczyć funkcję $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, dla której proces $X_t = \exp\left(\int_0^t e^s \mathrm{d}W_s - g(t)\right)$, $t \geq 0$, jest martyngałem.

Wskazówka: $\left(\int_0^t e^s dW_s\right)_{t\geq 0}$ *jest procesem gaussowskim. Jakie są jego parametry?*

2. Niech $\tau = \inf\{t : W_t = t + 1\}$. Obliczyć $\mathbb{P}(\tau < \infty)$.

3. Załóżmy, że $\mathbf{W} = (W^1, W^2, \ldots, W^d)$ to proces Wienera w $\mathbb{R}^d$, startujący z $0 \in \mathbb{R}^d$, i niech $\tau = \inf\{t \geq 0 : |\mathbf{W}_t| = 1\}$. Obliczyć $\mathbb{E}\tau$.

4. Wykazać, że proces

$$X_t = (t^2 + 1)W_t - 2\int_0^t sW_s \mathrm{d}s, \qquad t \geq 0,$$

jest martyngałem i obliczyć $\mathbb{E}X_5^2$.

Wskazówka: Aby uniknąć rachunków, można użyć całkowania przez części.

5. Proces $(W_t^3)_{t\in[0,1]}$ zapisać w postaci sumy martyngału oraz procesu o wahaniu skończonym.

Wskazówka: Proces $(W_t^3 - 3tW_t)_{t\geq 0}$ *jest martyngałem; warto też użyć całkowania przez części.*

6. Udowodnić, że

$$\sum_{k=0}^{n-1} W_{k/n}(W_{(k+1)/n} - W_{k/n})^2 \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 W_t \mathrm{d}t$$

w sensie zbieżności w L^2.

7. Dane są dwa niezależne procesy Wienera W^1, W^2. Wykazać, że procesy

$$X_t = \int_0^t \sin s \, \mathrm{d}W_s^1 + \int_0^t \cos s \, \mathrm{d}W_s^2,$$
$$Y_t = \int_0^t \cos s \, \mathrm{d}W_s^1 - \int_0^t \sin s \, \mathrm{d}W_s^2, \qquad t \geq 0,$$

są niezależnymi procesami Wienera.

8. Niech $X_t = (1 + 3t)\int_0^t \frac{1}{1+3s} \mathrm{d}W_s$ dla $t \in [0, 1]$. Wykazać, że proces X ma ten sam rozkład co proces $Y_t = W_t + tW_1$, $t \in [0, 1]$.

9. Dane są dwa niezależne procesy Wienera W^1, W^2. Udowodnić, że dla dowolnego $T > 0$ oraz dowolnego ciągu podziałów $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = T$, $n = 1, 2, \ldots$, o średnicy zbiegającej do zera, mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{k_n} \left(W^1_{t_m^{(n)}} - W^1_{t_{m-1}^{(n)}}\right)\left(W^2_{t_m^{(n)}} - W^2_{t_{m-1}^{(n)}}\right) = 0$$

w sensie zbieżności w L^2.

10. Dane są dwa niezależne procesy Wienera W^1, W^2. Dla $T > 0$, obliczyć

$$\int_0^T W_s^1 \, \mathrm{d}W_s^2 + \int_0^T W_s^2 \, \mathrm{d}W_s^1.$$

11. Wykazać, że

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \sqrt{s}\mathrm{d}W_s}{t\log t} = 0 \qquad \text{p.n.}$$

Wskazówka: Licznik to proces Wienera z zamienionym czasem: $\tilde{W}_{f(t)}$ dla pewnej funkcji f.

12. Rozstrzygnąć, czy proces $\left(\int_1^t e^{-W_t}\mathrm{d}W_t\right)_{t\geq 1}$ jest zbieżny w L^2 gdy $t \to \infty$.