WAS, zadania na pierwszą kartkówkę

We wszystkich zadaniach poniżej, $(W_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera.

1. Obliczyć $\mathbb{P}(2W_1^2 - 2W_1W_2 + W_2^2 \geq 1)$.

Wskazówka: Istnieje rozwiązanie, które unika rachunków: użyć rozkładu gamma.

2. Obliczyć $\mathbb{E}(W_3W_2|W_4)$.

3. Niech $V = (V_t)_{t\geq 0}$ będzie procesem Wienera niezależnym od W oraz niech α będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Udowodnić, że proces $(\sin\alpha \cdot W_t + \cos\alpha \cdot V_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera.

4. Wykazać, że proces $X_t = \int_0^t W_s \mathrm{d}s$, $t \geq 0$, jest procesem gaussowskim i obliczyć jego funkcję kowariancji.

5. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że proces Wienera przyjmie wartość wymierną dla pewnego $t \in \mathbb{Q}_+$.

6. Zmienna losowa τ jest niezależna od procesu Wienera W i ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznaczyć rozkład zmiennej W_τ.

Wskazówka: Można np. obliczyć funkcję charakterystyczną.

7. Procesy $X = (X_t)_{t\geq 0}$, $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ mają prawostronnie ciągłe trajektorie i te same rozkłady skończenie wymiarowe.

a) Wykazać, że jeśli X przyjmuje z prawdopodobieństwem 1 wyłącznie wartości całkowite, to Y także ma tę własność.

b) Wykazać, że jeśli $\limsup_{t\to 3^-} X_t \geq 5$ p.n., to $\limsup_{t\to 3^-} Y_t \geq 5$ p.n..

8. Proces $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ jest gaussowski i spełnia warunek $\mathbb{E}X_t = 0$ dla każdego $t \in [0,1]$. Ponadto, dla wszystkich s, $t \in [0,1]$,

$$|\mathrm{Cov}(X_s, X_t) - \mathrm{Cov}(X_t, X_t)| \leq 5|s-t|.$$

Wykazać, że X posiada modyfikację ciągłą.

9. Niech $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$. Czy zbiór

$$\{x \in \mathcal{X} : \lim_{t\downarrow 0} x(t) = 0 \text{ oraz } x(s) \geq 0 \text{ dla } s \in [9,10]\}$$

należy do σ-ciała generowanego przez zbiory cylindryczne? Jaka będzie odpowiedź, jeśli weźmiemy $\mathcal{X} = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ (funkcje ciągłe na $\mathbb{R}_+$)?

10. Załóżmy, że $\Omega = \{0,1\}$ i rozważmy proces $X = (X_t)_{t\geq 0}$ zadany wzorem

$$X_t(0) = t, \qquad X_t(1) = t \wedge 1.$$

Niech $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ oznacza filtrację generowaną przez proces X. Czy zmienna $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t > 1\}$ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$? A względem $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$?

11. Załóżmy, że $(\tau_n)_{n=1,2,\ldots}$ jest malejącym ciągiem momentów zatrzymania względem pewnej filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Czy wynika stąd, że $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$? A względem $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$? W przypadku dopowiedzi pozytywnej na któreś z pytań, rozstrzygnąć, czy $\mathcal{F}_\tau = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{F}_{\tau_n}$.

12. Wykazać, że procesy $((1-t)W_{t/(1-t)})_{0\leq t\leq 1}$ oraz $(tW_{t^{-1}-1})_{0\leq t\leq 1}$ mają ten sam rozkład (na odpowiednim σ-ciele zbiorów cylindrycznych).

13. Wykazać, że

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \log \left[\int_0^t \exp(W_s) \mathrm{d}s \right]$$

zbiega według rozkładu, gdy $t \to \infty$, do zmiennej losowej $W_1^* = \sup_{0 \le s \le 1} W_s$.

Wskazówka. Jeśli f jest nieujemną funkcją ciągłą na $[0,1]$, to

$$\lim_{p \to \infty} \left(\int_0^1 f(u)^p du \right)^{1/p} = \sup_{[0,1]} f.$$

Warto też skorzystać z tego, że $(u^{-1/2} W_{tu})_{t \ge 0}$ jest procesem Wienera.