Niech $d \geq 3$ będzie ustaloną liczbą całkowitą i niech $(W_t)_{t\geq 0}$ będzie procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$. Wykażemy, że dla $d \geq 3$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, proces

$$X_t = |W_t - x_0|^{2-d}, \qquad t \geq 0$$

nie jest martyngałem. W tym celu, zauważmy, iż zachodzi tożsamość

$$|x|^{2-d} = C_d \int_0^\infty p_t(x)\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},$$

gdzie

$$p_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-|x|^2/2t\right), \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

jest gęstością W_t oraz

$$C_d = \left[\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-1/2t\right) \mathrm{d}t\right]^{-1}.$$

(Istotnie: wystarczy zastosować podstawienie.) Wobec tego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_s = \mathbb{E}|W_s - x_0|^{2-d} &= C_d \mathbb{E} \int_0^\infty p_t(W_s - x_0)\mathrm{d}t \\
&= C_d \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty p_t(x - x_0)p_s(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= C_d \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} p_t(x - x_0)p_s(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= C_d \int_0^\infty p_{t+s}(x_0)\mathrm{d}t \\
&= C_d \int_s^\infty p_t(x_0)\mathrm{d}t \xrightarrow{s\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

W przejściu z drugiej do trzeciej linijki skorzystaliśmy z twierdzenia Fubiniego dla funkcji nieujemnych, a w przejściu z trzeciej do czwartej użyliśmy faktu, iż splot p_t oraz p_s wynosi p_{t+s} (suma niezależnych zmiennych o rozkładach takich jak W_t, W_s, ma rozkład taki, jak W_{t+s}). Gdyby więc $(X_t)_{t\geq 0}$ był martyngałem, mielibyśmy $\mathbb{E}X_s = 0$ dla wszystkich s, co jest niemożliwe: X przyjmuje wartości dodatnie.

Z drugiej strony, proces X jest martyngałem lokalnym: wystarczy zastosować zadanie 6.7 do funkcji $f(x) = |x|^{2-d}$ harmonicznej w $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Ciągiem lokalizującym jest ciąg $\tau_n = \inf\{t : |W_t - x_0| \leq 1/n\}$.