ZADANIA Z WAS – 9

1. Obliczyć $\int_0^t W_s^2 dW_s$.
Wsk. Skorzystać z zadania 7.4a).

2. a) $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$, $A \in \mathcal{V}^c$. Udowodnić, że

$$M_t A_t = M_0 A_0 + \int_0^t A_s dM_s + \int_0^t M_s dA_s.$$

b) $A, B \in \mathcal{V}^c$. Udowodnić, że

$$B_t A_t = B_0 A_0 + \int_0^t A_s dB_s + \int_0^t B_s dA_s.$$

c)$Z' = Z'_0 + M + A$, $Z'' = Z''_0 + N + B$ są ciagłymi semimartyngałami ($M, N \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$, $A, B \in \mathcal{V}^c$).
Udowodnić, że

$$Z'_t Z''_t = Z'_0 Z''_0 + \int_0^t Z'_s dZ''_s + \int_0^t Z''_s dZ'_s + \langle M, N\rangle_t.$$

3. Udowodnić twierdzenie o zmajoryzowanym przejściu do granicy dla całki stochastycznej:
$M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$, $Y \in \Lambda^2_T(M)$, X_n jest procesem prognozowalnym, $|X_n(t,\omega)| \le Y(t,\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, $X_n(t,\omega) \to X(t,\omega)$, $t < T, \omega \in \Omega$. Pokazać, że $X_n, X \in \Lambda^2_T(M)$ i

$$\forall_{t<T} \quad \int_0^t X_n dM \underset{P}{\to} \int_0^t X dM.$$

Uogólnić to twierdzenie na $\int X_n dZ$, gdzie Z jest ciągłym semimartyngałem, a Y jest *ptol*.