ZADANIA Z WAS – 8

1. $X \in \Lambda^2_T(M)$, $t_1 < t_2 < T$, ξ jest dowolną zmienną losową, $\mathcal{F}_{t_1}$-mierzalną. Pokazać, że wtedy $\xi X \mathbb{1}_{(t_1,t_2]} \in \Lambda^2_T(M)$ i $\int_{t_1}^{t_2} \xi X dM = \xi \int_{t_1}^{t_2} X dM$.
Wsk. Rozpatrzyć

$$\sigma_n = \begin{cases} t_1 & \text{gdy } |\xi| > n \\ T & \text{gdy } |\xi| \le n \end{cases}.$$

2. M jest ciągłym martyngałem lokalnym. Pokazać:
a) Jeśli M jest ograniczony, to M jest martyngałem.
b) Jeśli M jest nieujemny, to M jest nadmartyngałem.
c) Jeśli $M_0 = 0$ i $E\langle M\rangle_t < \infty$ dla $t \in \mathbb{R}_+$, to $M \in \mathcal{M}^{2,c}$.
Wsk. do b): Skorzystać z lematu Fatou.

3. Pokazać, że $\mathcal{M}^c_{\text{loc}} = \mathcal{M}^c_{\text{loc}\,\text{loc}}$ i $\mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc}} = \mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc}\,\text{loc}}$, to znaczy, że jeśli M jest taki, że istnieje ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow \infty$, dla którego $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}^c_{\text{loc}}$ ($\mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc}}$), to $M \in \mathcal{M}^c_{\text{loc}}$ ($\mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc}}$).
Wsk. Pokazać najpierw, że jeśli dla pewnego procesu N zachodzi $N^\tau, N^\sigma \in \mathcal{M}^c$ (τ, σ są momentami zatrzymania), to $N^{\tau\vee\sigma} \in \mathcal{M}^c$. Wywnioskować stad, że jeżeli τ_n są momentami zatrzymania, takimi że $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}^c$, $n = 1, 2, \ldots$ i $\sup_n \tau_n = \infty$, to $M \in \mathcal{M}^c_{\text{loc}}$.

4. Dla $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc}}$ i $X \in \Lambda^2(M)$ skonstruować $\int X dM$ tak, żeby zachodziło twierdzenie o zatrzymywaniu całki stochastycznej tj.

$$\int X dM^\tau = \left(\int X dM\right)^\tau = \int \mathbb{1}_{(0,\tau]} X dM,$$

przy czym w przypadku gdy $M^\tau \in \mathcal{M}^{2,c}$ całka po lewej stronie ma być "zwykłą" całką Ito. Pokazać, że $\int X dM \in \mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc}}$.
Wsk. Skorzystać z Zadania 3.

5. $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc}}$, $X \in \Lambda^2(M)$, Y jest *ptol* (prognozowalny, trajektorie są funkcjami ograniczonymi lokalnie, tj na każdym $[0,t]$, $t < \infty$). Pokazać, że wtedy $XY \in \Lambda^2(M)$, $X \in \Lambda^2(\int Y dM)$, $Y \in \Lambda^2(\int X dM)$ i

$$\int XY dM = \int X d\Big(\int Y dM\Big) = \int Y d\Big(\int X dM\Big).$$

Wsk. Zauważyć najpierw, że ta równość zachodzi dla $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ oraz $X, Y, XY \in \mathcal{L}^2_t(M)$, $\forall t < \infty$ (a nie tylko dla Y ograniczonego).