ZADANIA Z WAS – 7

1. $X \in \mathcal{L}^2_T(M)$, $t_1 < t_2 \le T$, ξ jest ograniczoną zmienną losową, $\mathcal{F}_{t_1}$-mierzalną. Pokazać, że wtedy $\xi X \mathbb{1}_{(t_1,t_2]} \in \mathcal{L}^2_T(M)$ i $\int_{t_1}^{t_2} \xi X dM = \xi \int_{t_1}^{t_2} X dM$, gdzie

$$\int_0^T \mathbb{1}_{(t_1,t_2]}(s) X_s \, dM_s = \int_0^{t_2} X_s \, dM_s - \int_0^{t_1} X_s \, dM_s \overset{\text{ozn}}{=} \int_{t_1}^{t_2} X_s dM_s.$$

2. $0 \le t_1 < \ldots < t_m < \infty$, $\xi_k \in L^2(\Omega)$, ξ_k jest $\mathcal{F}_{t_k}$-mierzalna dla $k = 1, \ldots, m$, $X_t = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(t)$. Pokazać, że dla dowolnego $T \le \infty$ jest $X \in \mathcal{L}^2_T$ i

$$\int_0^t X dW = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k (W_{t_{k+1} \wedge t} - W_{t_k \wedge t}).$$

3. $T < \infty$, X jest procesem prognozowalnym, ciągłym względem t w $L^2(\Omega)$. Pokazać, że wtedy $X \in \mathcal{L}^2_T$ i dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $0 \le t_{1,n} < \ldots < t_{m_n,n} = T$ i dowolnego $t \le T$

$$\sum_{k=1}^{m_n-1} X_{t_{k,n}} (W_{t_{k+1,n} \wedge t} - W_{t_{k,n} \wedge t}) \to \int_0^t X dW \quad \text{w } L^2(\Omega).$$

4. a) Obliczyć $\int_0^t W_s \, dW_s$.
b) Dla ciągu podziałów jak w Zad. 3 obliczyć granicę w $L^2(\Omega)$ ciągu

$$\sum_{k=1}^{m_n-1} W_{t_{k+1,n}} (W_{t_{k+1,n}} - W_{t_{k,n}}).$$

Wsk. Patrz wskazówka do zad. 6.2

5. $h \in L^2([0,T])$, $X_t = \int_0^t h(s) dW_s$, $0 \le t \le T$. Pokazać, że proces $X = (X_t)_{t \in [0,T]}$ jest procesem Gaussa o przyrostach niezależnych. Znaleźć (opisać) jego rozkłady skończenie wymiarowe.

6. Dla $h \in C^1([0,T])$, $T < \infty$, pokazać, że

$$\int_0^T h(s) dW_s = h(T) W_T - \int_0^T h'(s) W_s ds.$$

Wsk. Wykorzystać twórczo (uogólnić) wsk. do zad. 6.2

7. Pokazać, że proces

$$Y_t = \begin{cases} (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s & \text{gdy } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{gdy } t = 1 \end{cases}$$

ma takie same rozkłady skończenie wymiarowe jak $Z_t = W_t - tW_1$ (jest to tzw. *most Browna*). Wywnioskować stąd, że Y jest ciągły w 1.

8. a) $\alpha > 0$. Znaleźć rozkłady skończenie wymiarowe procesu $Y_t = \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$.
b) Pokazać, że Y_t jest zbieżny według rozkładu, gdy $t \to \infty$.
c) Niech ξ będzie zmienną losową o rozkładzie takim jak rozkład graniczny w b), niezależną od W. Znaleźć rozkłady skończenie wymiarowe procesu $X_t = e^{-\alpha t}\xi + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$ i pokazać, że są one niezmiennicze dla przesunięć w czasie, tzn. proces jest *stacjonarny* (proces Ornsteina Uhlenbecka).
d) Pokazać, że ten proces spełnia równanie (Langevina)

$$X_t = \xi - \alpha \int_0^t X_s ds + W_t.$$