ZADANIA Z WAS – 6

1. (Dla znających trochę analizę funkcjonalną) h jest funkcją prawostronnie ciągłą na $[0,a]$, $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = a$, $n = 1,2,\ldots$, jest ciągiem normalnym podziałów, takim że dla każdej funkcji ciągłej x na $[0,a]$ istnieje skończona granica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{m_n-1} x(t_j^n)(h(t_{j+1}^n) - h(t_j^n)).$$

Pokazać, że h ma wahanie skończone na $[0,a]$.
Wsk. Rozpatrzyć funkcjonał na $C[0,a]$ dany przez powyższą sumę, skorzystać z tw. Banacha Steinhausa.

2. a) M jest ciągłym martyngałem, $M_0 = 0$, którego trajektorie mają wahanie ograniczone na $[0,t]$. Pokazać, że M jest zerem (nieodróżnialny od) na $[0,t]$.
b)Uogólnienie. A jest zdarzeniem takim, że dla $\omega \in A$ trajektorie ciągłego martyngału M, $M_0 = 0$, mają wahanie skończone na $[0,t]$. Pokazać, że dla P-prawie każdego $\omega \in A$ jest $M_\cdot(\omega) = 0$ na $[0,t]$.
Wsk. do a): Rozpatrzyć $\tau_n = \inf\{s : |M_s| + |M|_s \geq n\}$ i skorzystać z równości

$$M_t^2 = \sum (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 + 2\sum M_{t_k}(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})$$

dla $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t$.

3. $\mathcal{F}_t = \overline{\mathcal{F}_t^W}$, $M_t = W_t^2 - t$, $t \in \mathbb{R}_+$. Pokazać, że $\langle M\rangle_t = 4\int_0^t W_r^2 dr$.

4. $M \in \mathcal{M}^{2,c}$. Ustalmy $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ i niech ξ_j będzie ograniczoną zmienną losową $\mathcal{F}_{t_j}$-mierzalną, $j = 0,1,\ldots,m-1$. Definiujemy

$$N_t = \sum_{j=0}^{m-1} \xi_j (M_{t_{j+1}\wedge t} - M_{t_j\wedge t}).$$

Pokazać, że $N \in \mathcal{M}^{2,c}$ i znaleźć $\langle N\rangle$. Spróbować wyrazić $\langle N\rangle$ jako całkę Stieltjesa względem $\langle M\rangle$.

5. $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}$, τ jest momentem zatrzymania. Pokazać, że

$$\langle M^\tau, N\rangle = \langle M, N^\tau\rangle = \langle M^\tau, N^\tau\rangle = \langle M, N\rangle^\tau.$$

6. (Lemat do wykorzystania na wykładzie) $(\xi_{n,m})_{n,m}$ jest ciągiem podwójnym nieujemnych zmiennych losowych, takim że $E\xi_{n,m}^2 \to 0$, gdy $n,m \to \infty$, $\xi_{n,m} = \xi_{m,n}$ i $\xi_{n_1,n_2} + \xi_{n_2,n_3} \geq \xi_{n_1,n_3}$ dla $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Pokazać, że istnieje podciąg $(n_k)_k$, taki że $P(\xi_{n_k,n_l} \to 0,\ k,l \to \infty) = 1$.
Wsk. Skorzystać z lematu Borela Cantelli.