ZADANIA Z WAS – 5

1. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ są i.i.d. o skończonej wartości oczekiwanej. Definiujemy

$$X_{-n} = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}, \quad \mathcal{F}_{-n} = \sigma(X_{-n}, X_{-n-1}, \ldots),$$

$n = 1, 2, \ldots$. Pokazać, że $(X_{-n}, \mathcal{F}_{-n})_{-n=-1,-2,\ldots}$ jest martyngałem („z czasem odwróconym”). Wyprowadzić stąd mocne prawo wielkich liczb.
Wsk. Skorzystać też z prawa 0-1 Kołmogorowa.

2. $T = \mathbb{R}_+$ lub $\mathbb{Z}_+$, $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest ustaloną filtracją, a $X = (X_t)_{t\in T}$ jest adaptowanym, całkowalnym procesem, prawostronnie ciągłym w przypadku czasu ciągłego. Pokazać, że X jest (nad)martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $t \in T$ i dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ, takiego że $\tau \geq t$ zachodzi $EX_\tau = EX_t$ ($EX_\tau \leq EX_t$ w przypadku nadmartyngału).

3. $T = \mathbb{R}_+$ lub $\mathbb{Z}_+$, $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest (nad)martyngałem, prawostronnie ciągłym w przypadku czasu ciągłego. Pokazać, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ, $(X_{\tau\wedge t}, \mathcal{F}_{\tau\wedge t})_{t\in T}$ oraz $(X_{\tau\wedge t}, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ są (nad)martyngałami.

4. Dla $a \neq 0$, niech $\tau_a = \inf\{t : W_t = a\}$. Obliczyć $Ee^{-\lambda\tau_a}$, $\lambda > 0$ (jest to tzw. *transformata Laplace'a (rozkładu) zm. losowej τ_a*).
Wsk. Skorzystać z Zad. (4.3) i z tw. Dooba.

5. Pokazać, że jeśli τ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in\mathbb{R}_+}$, takim że $E\tau < \infty$, to $EW_\tau = 0$, $EW_\tau^2 = E\tau$.
Wsk. Rozpatrzyć $W_{\tau\wedge n}$, $W_{\tau\wedge n}^2 - \tau\wedge n$, pokazać, że $W_{\tau\wedge n} \to W_\tau$ w L^2, gdy $n \to \infty$.

6. Dla $\alpha, \beta > 0$, niech $\tau = \inf\{t : |W_t| = \alpha\sqrt{\beta + t}\}$. Pokazać, że $E\tau < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha < 1$ i wówczas $E\tau = \frac{\alpha^2\beta}{1-\alpha^2}$.