ZADANIA Z WAS – 4

1. $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem o przyrostach niezależnych, $EX_t = 0$, $EX_t^2 < \infty$ dla $t \in \mathbb{R}_+$. Oznaczmy $Y_t = X_t^2 - EX_t^2$. Pokazać, że $(Y_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest martyngałem, gdzie $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$, lub ogólniej, X jest adaptowany do $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ i $X_t - X_s$ jest niezależna od $\mathcal{F}_s$, $s < t$.

2. $Z = (U, V)$ jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^2$. Pokazać, że następujące procesy są martyngałami względem $(\mathcal{F}_t^Z)_{t\in\mathbb{R}_+}$:
a) $U_t^2 - V_t^2$;
b) $U_t V_t$;
c) $tU_t - \int_0^t U_s ds$.

W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ oznacza standardowy proces Wienera

3. Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ oznaczmy
$$Z_t^\lambda = e^{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}.$$
Pokazać, że $(Z_t^\lambda, \mathcal{F}_t^W)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest martyngałem.

4. Pokazać, że dla dowolnych dodatnich t, α, β
$$P(\sup_{s\le t} W_s > \beta + \frac{1}{2}\alpha t) \le e^{-\alpha\beta}.$$
Wsk. Skorzystać z poprzedniego zadania.

5. Pokazać, że następujące zdania są równoważne:

(a) $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = 1$ p.n.

(b) $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = -1$ p.n.

(c) $\limsup_{t\to 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log\log 1/t}} = 1$ p.n.

(d) $\liminf_{t\to 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log\log 1/t}} = -1$ p.n.

Własność procesu Wienera określoną przez warunki (a)–(d) nazywa się *prawem iterowanego logarytmu*.