ZADANIA Z WAS – 3

1. W chwili $t = 0$ cząstka zaczyna ruch po osi X-ów w kierunku dodatnim, z prędkością 1. W chwili $t = 1$ rzucamy monetą i jeśli wypadnie orzeł, cząstka kontynuuje swój ruch, jeżeli wypadnie reszka, zmienia kierunek ruchu, tzn. zaczyna poruszać się w lewo, z tą samą prędkością. Niech X_t oznacza położenie cząstki w chwili t, $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$. Sprawdzić, że $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in\mathbb{R}_+} \neq (\mathcal{F}_{t+}^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

2. $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem o przyrostach niezależnych, $t > s \geq 0$. Pokazać, że
a) $X_t - X_s$ jest niezależne od $\mathcal{F}_s^X$,
b) gdy X jest prawostronnie ciągły, to $X_t - X_s$ jest niezależne od $\mathcal{F}_{s+}^X$.

Wsk. do b): Pokazać, że dla każdej funkcji ciągłej i ograniczonej f i $A \in \mathcal{F}_{s+}$ zachodzi $E(f(X_t - X_s)\mathbf{1}_A) = E(f(X_t - X_s))P(A)$.

3. $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest filtracją w pewnej przestrzeni probabilistycznej.

a) Pokazać, że dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$
$$\overline{(\mathcal{F}_{t+})} = (\overline{\mathcal{F}_t})_+.$$

b) Udowodnić, że jeśli dla dowolnych $t \in \mathbb{R}_+$ i $A \in \mathcal{F}_\infty$ zachodzi $P(A|\mathcal{F}_t) = P(A|\mathcal{F}_{t+})$ p.n., to filtracja $(\overline{\mathcal{F}_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest prawostronnie ciągła.

Wsk. do b): Pokazać, że $\mathcal{F}_{t+} \subset \overline{\mathcal{F}_t}$.

4. $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest prawostronnie ciągłym procesem o przyrostach niezależnych. Pokazać, że filtracja $(\overline{\mathcal{F}_t^X})_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest prawostronnie ciągła.
Wsk. Skorzystać z zadań 3 i 2.

5. τ, σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Pokazać, że
a) $\{\tau \leq \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$,
b) $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

Wsk. do a): Wygodniej rozpatrzyć $\{\tau > \sigma\}$.

6. $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem adaptowanym, prawostronnie ciągłym. Udowodnić, że X jest progresywnie mierzalny.
Tę samą własność ma proces adaptowany, lewostronnie ciągły.
Wsk. Rozpatrzyć przy ustalonym $t > 0$

$$X_s^{(n)}(\omega) = \begin{cases} X_0(\omega) & \text{gdy } s = 0 \\ X_{k/2^n}(\omega) & \text{gdy } \frac{k-1}{2^n} < s \leq \frac{k}{2^n},\ k = 1, 2, \ldots, [t2^n] \\ X_t(\omega) & \text{gdy } \frac{[t2^n]}{2^n} < s \leq t. \end{cases}$$