ZADANIA Z WAS – 1

W zadaniach 1 – 5, $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ oznacza proces Wienera w $\mathbb{R}$.

1. Dla ustalonych $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ znaleźć gęstość rozkładu n-wymiarowej zmiennej losowej $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$.

2. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie W
a) są nieograniczone,
b) nie są jednostajnie ciągłe.
Wsk. Rozpatrzyć przyrosty.

3. Ustalmy dowolne $0 \le s < t$ i rozpatrzmy ciąg podziałów $s = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = t$, $n = 1, 2, \ldots$ i niech $a_n = \max_{j<m_n}(t_{j+1}^n - t_j^n)$. Pokazać, że jeśli $\sum_n a_n < \infty$, to

$$\sum_{j=0}^{m_n-1} (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 \to t - s, \qquad \text{gdy } n \to \infty,$$

z prawdopodobieństwem 1.
Wsk. Skorzystać z nierówności Czebyszewa i z lematu Borela–Cantelli.

4. Udowodnić, że trajektorie procesu Wienera mają z prawdopodobieństwem 1 wahanie nieskończone na każdym przedziale. (tzn $\sup\sum_{j=0}^{m}|W_{t_{j+1}} - W_{t_j}| = \infty$, gdzie supremum jest brane po wszystkich podziałach $s = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t$, $m = 1, 2, \ldots$).

Wsk. Pokazać, że jeśli f jest funkcją ciągłą o wahaniu skończonym na przedziale $[s, t]$, to dla każdego ciągu podziałów jak w Zadaniu 3 o średnicy dążącej do 0 (tzn. $a_n \to 0$) i dowolnego $\delta > 0$ zachodzi

$$\sum_{j=0}^{m_n-1} |f(t_{j+1}^n) - f(t_j^n)|^{1+\delta} \to 0, \qquad \text{gdy } n \to \infty,.$$

5. Pokazać, że następujące procesy są procesami Wienera:
a) $(W_{t+h} - W_h)_{t\in\mathbb{R}_+}$, dla dowolnego $h \ge 0$;
b) $(-W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (odbicie);
c) $(cW_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ dla dowolnego $c > 0$ (przeskalowanie czasu lub samopodobieństwo);
d) $(W_1 - W_{1-t})_{t\in[0,1]}$.

6. $(V_t)_{t\in[0,1]}$ jest procesem Wienera na $[0, 1]$. Pokazać, że $W_t = (1 + t)V_{\frac{t}{1+t}} - tV_1$ jest procesem Wienera na $[0, \infty)$.