**ZADANIA Z WAS – 12**

**1.** $Z = M + A$ jest ciągłym semimartyngałem, $Z_0 = 0$.
a) Znaleźć rozwiązanie równania $dX_t = X_t dZ_t$, $X_0 = x$.
b) Pokazać, że to rozwiązanie jest jedyne.
Wsk. Do a): Naśladować rozwiązanie zadania 10.2a). Do b): Niech $Y$ będzie drugim rozwiązaniem. Założyć najpierw, że $Z$ i $\langle M\rangle$ są ograniczone i rozpatrzyć $Y/X$.

**2.** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Rozwiązać explicite równanie stochastyczne $dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dW_t$, $X_0 = x \in \mathbb{R}$. (Jest to tzw. *geometryczny ruch Browna*)

**3.** $W$ jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$, $b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\sigma = [\sigma_{ij}] : \mathbb{R}^m \to$ macierze $m \times d$. Rozważmy układ stochastycznych równań różniczkowych

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), \qquad X(0) = x \in \mathbb{R}^m.$$

Przypuśćmy, że $X$ jest rozwiązaniem tego układu ($X$ jest procesem w $\mathbb{R}^m$) i niech $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy $C^2$. Napisać wzór Ito dla $f(X)$.
Wsk. Wygodnie jest wprowadzić macierz kwadratową $a = \sigma\sigma^*$.

**4.** (Uogólnienie zad. 7.8) Niech $a : [0, T) \to \mathbb{R}^m$, $A : [0, T) \to$macierze $m \times m$, $\sigma : [0, T) \to$macierze $m \times d$ będą funkcjami ograniczonymi i (dla uproszczenia) ciągłymi. $W$ jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$, $\xi$ jest zmienną losową w $\mathbb{R}^m$, niezależną od $W$. Niech $S$ oznacza jedyne rozwiązanie równania $\dot{S}(t) = A(t)S(t)$, $S(0) = I =$ macierz identycznościowa (kropka oznacza różniczkowanie po czasie). Pokazać, że

a) $\xi(t) = S(t)(\xi + \int_0^t S^{-1}(s)a(s)ds)$ jest rozwiązaniem równania
$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + a(t)$, $\xi(0) = \xi$,

b) $X(t) = S(t)(\xi + \int_0^t S^{-1}(s)a(s)ds + \int_0^t S^{-1}(s)\sigma(s)dW_s)$ jest (jedynym) rozwiązaniem równania stochastycznego

$dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))dt + \sigma(t)dW_t$, $X(0) = \xi$.

W poniższych zadaniach rozpatrujemy następującą sytuację: $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \to$macierze $d \times d$ są funkcjami mierzalnymi, ograniczonymi na zbiorach ograniczonych, $a = \sigma\sigma^*$, $W$ jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$. $X^x$ jest rozwiązaniem równania

$$dX_t^x = b(X_t^x)dt + \sigma(X_t^x)dW_t, \qquad X_0^x = x \in \mathbb{R}^d$$

(zakładamy, że istnieje). $D$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^d$, $x \in D$, $\tau^x = \inf\{t : X_t^x \notin D\}$.

$$Lf(x) = \sum_{j=1}^d b_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

**5.** Załóżmy, że $D$ jest ograniczony i $E\tau^x < \infty, x \in D$; $g : \overline{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ są ciągłe. Niech $v$ będzie funkcją klasy $C^2$ na pewnym zbiorze otwartym $D' \supset \overline{D}$, rozwiązującą równanie: $Lv(x) = g(x)$ dla $x \in D$, $v(x) = \varphi(x)$ dla $x \in \partial D$. Pokazać, że wtedy $v(x) = E(\varphi(X_{\tau^x}^x) - \int_0^{\tau^x} g(X_s^x)ds)$.

**6.** Załóżmy, że istnieje $D' \supset \overline{D}$, funkcja $f$ klasy $C^2$ na $D'$ i liczba $c > 0$, takie że $f \geq 0$ w $D$, zaś $Lf \leq -c$ w $D$. Pokazać, że wówczas $E\tau^x < \infty$.
Wsk. Najpierw założyć, że $D$ jest ograniczony. Skorzystać z wzoru Ito.

**7.** Załóżmy, że istnieje $R > 0$ takie, że dla wszystkich $y \in D$ jest $|y_1| < R$, a ponadto $b_1$ jest ograniczone w $D$, $a_{11}(y) \geq \alpha > 0$ dla $y \in D$. Pokazać, że wtedy $E\tau^x < \infty$.
Wsk. Rozpatrzyć funkcję $f(x) = \cosh rR - \cosh rx_1$ dla odpowiedniego $r > 0$.