ZADANIA Z WAS – 11

1. $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$, $M_0 = 0$, przy czym $\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t = \infty$ p.n. i załóżmy dla uproszczenia, że trajektorie $\langle M\rangle$ są ściśle rosnące (to założenie nie jest niezbędne). Dla każdego $t \geq 0$ definiujemy $\tau_t = \inf\{s : \langle M\rangle_s > t\}$ („losowa zamiana czasu"). Pokazać, że $(M_{\tau_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem Wienera.
Wsk. Skorzystać z tw. Lévy'ego.

2. a) $a, \lambda \in \mathbb{R}$. Pokazać, że proces Wienera z dryfem $W_t - \lambda t$ dochodzi z prawdopodobieństwem 1 do a wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda a \leq 0$.
b) Załóżmy $\lambda a < 0$ i zdefiniujmy $\sigma_a = \inf\{t : W_t - \lambda t = a\}$. Pokazać, że

$$E(e^{\lambda W_{\sigma_a} - \frac{\lambda^2}{2}\sigma_a}) = 1.$$

Wsk. Skorzystać z wniosku z tw. Girsanowa.

3. Niech μ będzie miarą Wienera w $C([0,1])$ (tzn $\mu(B) = P(W \in B)$, gdzie W jest procesem Wienera na $[0,1]$, $B \in \mathcal{B}(C)$). Dla $h \in C([0,1])$ definiujemy nową miarę probabilistyczną $\mu_h(B) = \mu(h+B)$, $B \in \mathcal{B}(C)$. Pokazać, że jeśli h ma postać $h(t) = \int_0^t g(s)ds$ dla pewnej $g \in L^2([0,1])$, to μ_h ma gęstość względem μ i znaleźć tę gęstość (co więcej, można pokazać, że jeśli h nie ma takiej postaci, to μ_h jest singularna względem μ, tzn. jest skupiona na zbiorze miary μ zero).
Wsk. Skorzystać z twierdzenia Girsanowa.

4. $Z = Z_0 + M + A$, $Y = Y_0 + N + B$ są ciągłymi semimartyngałami ($M, N \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$, $A, B \in \mathcal{V}^c$). Definiujemy *całkę Stratonowicza*:

$$\int_0^t Y_s \circ dZ_s := \int_0^t Y_s dZ_s + \frac{1}{2}\langle M, N\rangle.$$

Pokazać, że jeśli f jest funkcją klasy C^3, to

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s) \circ dZ_s.$$

5. Niech Z, Y będą jw. Pokazać, że dla dowolnego ciągu podziałów $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = t$ o średnicy dążącej do 0, zachodzi

$$\sum_{j=0}^{m_n-1} \frac{Y_{t_j^n} + Y_{t_{j+1}^n}}{2}(Z_{t_{j+1}^n} - Z_{t_j^n}) \underset{P}{\rightarrow} \int_0^t Y_s \circ dZ_s.$$