ZADANIA Z WAS – 10

1. Obliczyć $\int_0^t W_s^n dW_s$, $n = 1, 2, \ldots$

2. $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$, $M_0 = 0$; dla $\lambda \in \mathbb{R}$ definiujemy $U_t^{(\lambda)} = e^{\lambda M_t - \frac{1}{2}\lambda^2 \langle M \rangle_t}$.
a) Pokazać, że $U^{(\lambda)}$ spełnia równanie $dU_t^{(\lambda)} = \lambda U_t^{(\lambda)} dM_t$ (dokładniej: $U_t^{(\lambda)} = 1 + \lambda \int_0^t dU_s^{(\lambda)} dM_s$).
b) Pokazać, że jeśli $E(\int_0^t e^{2\lambda M_s} d\langle M \rangle_s) < \infty$, $t \geq 0$, to $U^{(\lambda)} \in \mathcal{M}^{2,c}$.

3. Niech X będzie procesem prognozowalnym, takim że $E \int_0^T X^{2m}(s) ds < \infty$ dla pewnych $m \geq 1$, $T < \infty$. Oznaczmy $M = \int X dW$. Pokazać, że

$$EM_T^{2m} \leq (m(2m-1))^m T^{m-1} E \int_0^T X^{2m}(s) ds.$$

Wsk. Skorzystać z wzoru Ito, nierówności Höldera i z lokalizacji.

4. $D \subset \mathbb{R}^d$ jest otwarty i ograniczony, $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2, harmoniczną w D (tzn. $\Delta h(x) = \sum_{j=1}^d \partial^2 h(x)/\partial x_j^2 = 0$, $x \in D$). W jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$. Dla ustalonego $x \in D$ definiujemy $\tau = \inf\{t : W_t + x \notin D\}$. Pokazać, że $(h(W_{t \wedge \tau} + x))_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest martyngałem.
Wsk. Zastosować wzór Ito do $h(W_t + x)$.

5. W jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}^3$ jest ustalone $\neq 0$.
a) Pokazać, że $(1/|W_t - a|)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest martyngałem lokalnym jednostajnie całkowalnym, ale nie jest martyngałem (względem filtracji $(\overline{\mathcal{F}_t^W})_{t \in \mathbb{R}_+}$).
b) Pokazać, że $P(\exists_t\ W_t = a) = 0$, $\lim_{t \to \infty} |W_t| = \infty$ p.n.
Wsk. Zdefiniować $\tau_n = \inf\{t : |W_t - a| = \frac{1}{n}\}$, $\sigma_n = \inf\{t : |W_t - a| = n\}$, skorzystać z faktu, że funkcja $x \to 1/|x - a|$ jest harmoniczna w $\mathbb{R}^3 \setminus \{a\}$ oraz z Zad. 4.

6. W jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Pokazać, że z prawdopodobieństwem 1 W dochodzi do każdego otoczenia a, ale z prawdopodobieństwem 0 do samego a.
Wsk. Funkcja $-\log|x-a|$ jest harmoniczna w $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$, skorzystać także z τ_n, σ_n zdefiniowanych j.w.

7. Udowodnić wielowymiarową wersję tw. Lévy'ego: $M_1, \ldots, M_d \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, $M_j(0) = 0$, $j = 1, \ldots, d$. $(M_1, \ldots, M_d)$ jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle M_j, M_k \rangle_t = \delta_{j,k} t$, $j, k = 1, \ldots, d$.