WAS, zadania na czwartą kartkówkę

1. Załóżmy, że W jest jednowymiarowym procesem Wienera. Korzystając ze wzoru Itô, udowodnić, że
a) $(W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2)_{t\geq 0}$ jest martyngałem,
b) $(W_t^5 - 10tW_t^3 + 15t^2 W_t)_{t\geq 0}$ jest martyngałem.

2. Załóżmy, że W jest jednowymiarowym procesem Wienera. Udowodnić, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ,

$$\mathbb{E}W_\tau^4 \leq 36\mathbb{E}\tau^2.$$

3. Załóżmy, że $W = (W^{(1)}, W^{(2)})$ jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^2$. Dla $\alpha > 0$, zdefiniujmy

$$\tau_\alpha = \inf\left\{t : |W_t^{(2)}| = \alpha|1 + W_t^{(1)}|\right\}.$$

Wykazać, że $\mathbb{E}\tau_\alpha < \infty$ dla $\alpha < 1$ i $\mathbb{E}\tau_\alpha = \infty$ dla $\alpha \geq 1$.
Wsk. funkcja $h(x, y) = y^2 - x^2$ jest harmoniczna na $\mathbb{R}^2$.

4. Załóżmy, że $W = (W^{(1)}, W^{(2)}, \ldots, W^{(d)})$ jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, startującym z punktu różnego od 0. Niech $R_t = |W_t|$ dla $t \geq 0$ ($|\cdot|$ oznacza normę euklidesową w $\mathbb{R}^d$). Dowieść, że

$$B_t = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{R_s} \mathrm{d}W_s^{(i)}, \qquad t \geq 0,$$

jest jednowymiarowym procesem Wienera oraz zachodzi równość

$$R_t = B_t + \int_0^t \frac{d-1}{2R_s} \mathrm{d}s, \qquad t \geq 0.$$

5. Załóżmy, że M jest martyngałem lokalnym. Udowodnić, że proces $X = \big(\exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t)\big)_{t\geq 0}$ jest nadmartyngałem. Wykazać, że jeśli M jest ograniczony, to X jest martyngałem.

6. Dany jest ciągły proces H oraz proces $X \in \mathcal{M}^{2,c}$. Niech t będzie ustaloną liczbą dodatnią i niech $(t_k^n)_{k=0}^{m_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, będzie ciągiem podziałów odcinka $[0, t]$ o średnicy zbiegającej do 0. Udowodnić, że

$$\sum_{k=0}^{m_n - 1} H_{t_k^n}(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}) \to \int_0^t H_s \mathrm{d}X_s$$

według prawdopodobieństwa.