WAS, zadania na trzecią kartkówkę

We wszystkich zadaniach poniżej, $(W_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera.

1. Niech X, Y będą niezależnymi martyngałami. Obliczyć $\langle X, Y\rangle$.

2. Dana jest funkcja $h \in L^2([0,T])$, $T < \infty$. Niech $X_t = \int_0^t h(s)\mathrm{d}W_s$ oraz $Y_t = \int_0^t h^2(s)\mathrm{d}s$ dla $t \leq T$. Udowodnić, że proces $\big(\exp(X_t - Y_t/2)\big)_{t\in[0,T]}$ jest martyngałem.

3. Niech $X = (tW_t)_{t\geq 0}$. Udowodnić, że $\langle X, X\rangle = \Big(2\int_0^t sW_s^2\mathrm{d}s + \frac{1}{3}t^3\Big)_{t\geq 0}$.

4. Dana jest funkcja $h : [0,1] \to \{-1,1\}$. Wykazać, że $X = \Big(\int_0^t h(s)\mathrm{d}W_s\Big)_{t\in[0,1]}$ jest procesem Wienera i obliczyć $\langle X, W\rangle$.

5. Dana są liczby $1 < p < \infty$, $K > 0$ oraz ciągły lokalny martyngał M spełniający warunek $\mathbb{E}|M_\tau|^p \leq K$ dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ. Udowodnić, że M jest martyngałem.

6. Rozstrzygnąć, dla jakich $\alpha > 0$ proces $\Big(\int_0^t e^{\alpha W_s^2}\mathrm{d}W_s\Big)_{t\geq 0}$ jest martyngałem, a dla jakich $\alpha > 0$ jest tylko lokalnym martyngałem. Wskazać ciąg lokalizujący.

7. Wykazać, że dla dowolnego ciągłego martyngału lokalnego M, dowolnego procesu $X \in \Lambda_T^2(M)$ oraz dowolnego momentu zatrzymania $\tau \leq T$ zachodzi nierówność

$$\mathbb{E}\sup_{t<\tau}\left(\int_0^t X_s\mathrm{d}M_s\right)^2 \leq 4\mathbb{E}\int_0^\tau X_s^2\mathrm{d}\langle M\rangle_s.$$

8. Niech W^1, W^2 będą niezależnymi procesami Wienera. Dla $t \geq 0$, obliczyć $\int_0^t W_s^1\mathrm{d}W_s^2 + \int_0^t W_s^2\mathrm{d}W_s^1$.

9. Udowodnić, że dla $t \geq 0$ zachodzi równość $3\int_0^t W_s^2\mathrm{d}W_s = W_t^3 - 3tW_t$.