WAS, zadania na drugą kartkówkę

We wszystkich zadaniach poniżej, $(W_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera.

1. Niech τ, σ będą dwoma momentami zatrzymania. Czy $\mathcal{F}_\tau \cup \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\tau\vee\sigma}$?

2. Dla dowolnej liczby naturalnej n, τ_n jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Udowodnić, że $\limsup_{n\to\infty} \tau_n$ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$.

3. Niech $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ będzie filtracją generowaną przez $(W_t)_{t\geq 0}$ i niech $\tau = \inf\{t \geq 0 : W_t > 1\}$. Czy τ jest momentem zatrzymania względem a) $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, b) $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$, c) $(\overline{\mathcal{F}_t})_{t\geq 0}$?

4. Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1, równość

$$W_t^4 = W_t^3 - 3W_t^2 + 1$$

zachodzi dla nieskończenie wielu $t \geq 0$, ale nie zachodzi dla żadnego $t \in \mathbb{Q}_+$.

5. Proces $X = (X_t)_{t\geq 0}$ jest ciągłym martyngałem względem $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ i ma tę własność, że $(X_t^2)_{t\geq 0}$ jest nadmartyngałem względem $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Wykazać, że X jest stały p.n.

6. Dla $a < 0 < b$, niech $\tau = \inf\{t > 0 : W_t \in \{a, b\}\}$.
a) Dowieść, że $\mathbb{E}\tau_{a,b} = -ab$.
b) Dowieść, że dla dowolnej liczby $\lambda > 0$, $\mathbb{E}\exp(-\lambda\tau_{a,-a}) = (\cosh a\sqrt{2\lambda})^{-1}$.

7. Dla $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, niech $\sigma_{a,b} = \inf\{t \geq 0 : W_t = at + b\}$. Wykazać, że

$$\mathbb{P}(\sigma_{a,b} < \infty) = \exp(-2b^+ a)$$

($b^+ = \max\{b, 0\}$). Wywnioskować stąd, że przy ustalonym $\lambda > 0$, zmienna $Y = \sup_{t\geq 0}(W_t - \lambda t)$ ma rozkład wykładniczy z parametrem 2λ.

8. Dla $a > 0$, niech $\eta_a = \inf\{t > 0 : |W_t| = a\sqrt{t} + 1\}$. Udowodnić, że $\mathbb{E}\eta_a < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 1$.

9. Dany jest martyngał $(X_t)_{t\geq 0}$ adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Czy $(X_t)_{t\geq 0}$ jest martyngałem względem a) $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$, b) $(\overline{\mathcal{F}_t})_{t\geq 0}$, c) $(\sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{G}_t))_{t\geq 0}$, gdzie $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ jest filtracją niezależną od $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$?