Zadania z RP 1 - 9

Uwaga: zadania domowe znajdują się na następnej stronie.

1. Udowodnić, że dla dowolnej zmiennej losowej nieujemnej X oraz $p > 0$ zachodzi wzór

$$\mathbb{E}X^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(X \geq t)\mathrm{d}t = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t.$$

Wywnioskować stąd, że jeśli zmienna X ma rozkład dyskretny skoncentrowany na liczbach całkowitych nieujemnych, to

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X > k).$$

2. Liczby $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ ustawiono losowo w ciąg $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$. Niech N oznacza największą taką liczbę, że $a_k > a_{k-1}$ dla $k \leq N$. Obliczyć $\mathbb{E}N$.

3. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[-2,-1]$ oraz jednostajny na odcinku $[0,1]$, odpowiednio. Wyznaczyć rozkład $X+Y$.

4. Niech $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$, $r > 0$. Mówimy, że zmienna X ma rozkład *gamma z parametrami* λ, r (ozn. $\Gamma(\lambda, r)$), jeśli ma gęstość

$$g_{\lambda,r}(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\lambda^r x^{r-1}e^{-\lambda x}1_{[0,\infty)}(x).$$

a) Udowodnić, że jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi, $X \sim \Gamma(\lambda, r)$, $Y \sim \Gamma(\lambda, s)$, to $X+Y \sim \Gamma(\lambda, r+s)$.

b) Udowodnić, że jeśli $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathrm{Exp}(\lambda)$, to $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ma rozkład $\Gamma(\lambda, n)$.

c) Udowodnić, że jeśli $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$, to $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ ma rozkład $\Gamma(1/2, n/2)$ (jest to tzw. rozkład *chi kwadrat o n stopniach swobody*.

5. Zmienne losowe X, Y spełniają warunki $\mathrm{Var}X = 3$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = -1$, $\mathrm{Var}Y = 2$. Obliczyć $\mathrm{Var}(4X - 3Y)$ oraz $\mathrm{Cov}(5X - Y, 2X + Y)$.

6. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład jednostajny na kole $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Czy zmienne (X,Y) są niezależne?

b) Dowieść, że zmienne X oraz $(X+Y)/\sqrt{2}$ mają ten sam rozkład.

c) Obliczyć macierz kowariancji zmiennej (X,Y) oraz kowariancję zmiennych $X+2Y$, $X-Y$.

7. Na Ursynowie ginie średnio 7 samochodów tygodniowo. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że jutro będzie ,,dzień bez kradzieży".

8. Tekst broszury zawiera $n = 100000$ znaków. W trakcie pisania (na komputerze) każdy znak może zostać błędnie wprowadzony z prawdopodobieństwem $0,001$. Z kolei redaktor znajduje każdy z błędów z prawdopodobieństwem $0,9$, po czym tekst wraca do autora, który znajduje każdy z pozostałych błędów z prawdopodobieństwem $0,5$. Oszacować prawdopodobieństwo tego, że po obu korektach broszura będzie zawierała nie więcej niż 3 błędy.

9. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym Y ma ciągłą dystrybuantę. Dowieść, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

Zadania domowe: ósma seria

1. Zmienna losowe X oraz Y są niezależne, przy czym X ma rozkład z gęstością $g(x) = 2x1_{[0,1]}(x)$, a Y ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$. Obliczyć gęstość rozkładu zmiennej $X+Y$ oraz kwantyl rzędu $1/24$ rozkładu tej zmiennej.

2. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład z gęstością $g(x,y) = 6x1_{\{0\leq x\leq y\leq 1\}}$. Obliczyć kowariancję zmiennych $X+Y$ oraz $2X-Y$.

3. W 1000 torebek cukru umieszczono 100 oznakowanych kryształków. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że ustalona torebka będzie zawierała co najmniej dwa oznakowane kryształki. Oszacować błąd związany z przybliżeniem.

4. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych X_0, X_1, X_2, ... o tym samym rozkładzie posiadającym ciągłą dystrybuantę. Niech $\eta = \inf\{n : X_n > X_0\}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej η oraz obliczyć $\mathbb{E}\eta$.

(*Wskazówka:* Zmienna η przyjmuje wartości w zbiorze $\{1,2,\ldots\}$, a więc, w celu wyznaczenia jej rozkładu, wystarczy obliczyć $\mathbb{P}(\eta \geq k)$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Prawdopodobieństwa te można wyznaczyć korzystając z symetrii oraz zadania 9 powyżej. W celu obliczenia $\mathbb{E}\eta$, skorzystać z zadania 1.)