## Zadania z RP 1 - 7

**1.** Z talii 52 kart losujemy ze zwracaniem pięć razy po jednej karcie. Niech $X$ oznacza liczbę wyciągniętych pików, $Y$ - liczbę wyciągniętych kierów, a $Z$ - liczbę wyciągniętych waletów. Czy zmienne $X$, $Y$ są niezależne? Czy zmienne $X$, $Z$ są niezależne?

**2.** Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 6)$ są niezależne i mają ten sam rozkład, zadany wzorem $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
a) Czy zmienne $X_1 + X_2$, $X_1X_2$ są niezależne?
b) Czy zmienne $X_1 + X_2$, $X_3$, $X_4 + X_5X_6$ są niezależne?
c) Czy zmienne $X_1$, $X_1X_2$, ..., $X_1X_2 \ldots X_n$ są niezależne?

**3.** Zmienne losowe $X$, $Y$ są niezależne, przy czym dla $n = 1, 2, \ldots$ mamy $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}p$ oraz $\mathbb{P}(Y = n) = (1-q)^{n-1}q$. Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq Y)$.

**4.** Zmienne losowe $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ są niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$. Udowodnić, że $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

**5.** Zmienna losowa $X$ jest niezależna od siebie samej. Udowodnić, że istnieje $c$ takie, że $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

**6.** Zmienne $X$, $Y$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $X - Y$.

**7.** Zmienna $(X, Y)$ ma rozkład jednostajny na kwadracie $\{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$. Obliczyć $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1/2)$ i dowieść, że zmienne $X + Y$, $X - Y$ są niezależne.

**8.** Zmienna losowa $(X, Y)$ ma rozkład z gęstością $g(x, y) = Cxy1_{\{0 \leq x \leq y \leq 1\}}$.
a) Wyznaczyć $C$.
b) Obliczyć $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$.
c) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X/Y$.
d) Czy $X$, $Y$ są niezależne?
e) Czy $X/Y$, $Y$ są niezależne?

**9.** Zmienne losowe $X$, $Y$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Udowodnić, że zmienne $X/Y$ oraz $X + Y$ są niezależne.

**10.** Zmienna losowa $X$ ma rozkład wykładniczy z parametrem 1.
a) Wyznaczyć rozkłady zmiennych $[X]$ oraz $\{X\}$.
b) Czy zmienne te są niezależne?

**Uwaga:** $[x]$, $\{x\}$ oznaczają część całkowitą i część ułamkową liczby $x \in \mathbb{R}$.

## Zadania domowe: szósta seria

**1.** Rzucono dwa razy kostką. Niech $X$ oznacza sumę oczek, a $Y$ będzie iloczynem oczek. Czy zmienne $X$, $Y$ są niezależne?

**2.** W urnie znajduje się 5 białych kul ponumerowanych liczbami od 1 do 5. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli aż do momentu wyciągnięcia kuli z numerem parzystym. Niech $X$ oznacza liczbę losowań, a $Y$ będzie numerem na ostatniej kuli. Czy $X$, $Y$ są niezależne?

**3.** Zmienne losowe $X$, $Y$ są niezależne, przy czym $X$ ma rozkład Bernoulliego $B(n, p)$ (tzn. $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$), a rozkład $Y$ jest zadany przez $\mathbb{P}(Y = 1) = p$, $\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - p$. Wykazać, że $X + Y$ ma rozkład Bernoulliego $B(n + 1, p)$.

**4.** Zmienna losowa $(X, Y)$ ma rozkład jednostajny na trójkącie $\{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. Zbadać niezależność zmiennych $X$, $X/Y$.