Zadania z RP 1 - 5

Uwaga: zadania domowe znajdują się na następnej stronie.

1. Z urny zawierającej 15 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 15 losujemy bez zwracania 3 kule. Niech X oznacza liczbę wylosowanych kul o numerach parzystych. Wyznaczyć rozkład zmiennej X.

2. Rzucamy monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $p \in (0, 1]$, aż do momentu wyrzucenia k orłów (łącznie, niekoniecznie pod rząd). Niech X oznacza liczbę rzutów. Wyznaczyć rozkład zmiennej X.

3. Rzucamy dwa razy kostką. Niech X, Y oznaczają minimum oraz maksimum z uzyskanych liczb oczek, odpowiednio. Wyznaczyć rozkłady zmiennych X, Y oraz sprawdzić, że zmienne X i $7 - Y$ mają ten sam rozkład.

4. Z przedziału $[1, 7]$ losujemy liczbę X. Następnie, rzucamy prawidłową kostką i liczbę wyrzuconych oczek oznaczamy przez Y. Dowieść, że $[X]$ oraz Y mają ten sam rozkład. *Uwaga:* $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

5. Losujemy dwie liczby X, Y z przedziału $[0, 1]$.
a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.
b) Obliczyć $\mathbb{P}(X + Y > 1 | X \leq 1/2)$.

6. Na skrzyżowaniu ulic na pewnym kierunku światło czerwone świeci się minutę, a światło zielone - pół minuty (zakładamy, że nie ma żółtego światła). Samochód dojeżdża do skrzyżowania (w danym kierunku) w losowym momencie czasowym. Niech X oznacza czas spędzony na skrzyżowaniu; zakładamy, że nie ma korka.
a) Wyznaczyć rozkład zmiennej X.
b) Załóżmy, że po 20 sekundach samochód wciąż nie przejechał skrzyżowania; jakie jest prawdopodobieństwo, że opuści je w przeciągu najbliższych 10 sekund?

7. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -1, \\ \frac{1}{2}(t+1) & \text{dla } -1 \leq t < 0, \\ \frac{3}{4} & \text{dla } 0 \leq t < 4, \\ 1 & \text{dla } t \geq 4. \end{cases}$$

Obliczyć $\mathbb{P}(X = -5)$, $\mathbb{P}(2 < X \leq 5)$, $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(X < 0 | X > -1/2)$.

8. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ t/2 & \text{dla } 0 \leq t < 2, \\ 1 & \text{dla } t \geq 2. \end{cases}$$

Wyznaczyć dystrybuantę zmiennych $Y = \max(X, 1)$ oraz $Z = \min(X, X^2)$.

9. Niech $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ będzie funkcją prawostronnie ciągłą, niemalejącą, taką że $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ oraz $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$. Wykazać, że F jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej w pewnej przestrzeni probabilistycznej.

10. Zmienna losowa X ma tę własność, że X oraz X^2 mają ten sam rozkład. Wykazać, że X jest skoncentrowana na zbiorze $\{0, 1\}$.

11. Zmienne losowe X, Y mają tę własność, że dla dowolnej liczby $t \geq 0$ zachodzi równość $\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}(Y \leq -t)$. Wykazać, że dla dowolnego podzbioru borelowskiego $A \subseteq [0, \infty)$ zachodzi równość $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in -A)$.

Zadania domowe: czwarta seria

1. Rzucamy dwa razy kostką, oznaczając liczby wyrzuconych oczek przez X oraz Y. Wyznaczyć rozkład zmiennej $|X - Y|$.

2. W urnie znajdują się dwie białe i dwie czarne kule. Wyciągamy z urny dwie kule, oglądamy je, a następnie wrzucamy z powrotem. Procedurę powtarzamy aż do momentu wylosowania różnobarwnych kul. Niech X oznacza liczbę losowań. Wyznaczyć rozkład zmiennej X.

3. Z koła o promieniu 1 losujemy punkt; niech X oznacza odległość tego punktu od środka koła. Wyznaczyć rozkład zmiennej X oraz obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 1/4 | X \geq 1/9)$.

4. Zmienne losowe X, Y spełniają warunek $\mathbb{P}(X \in [-t, t]) = \mathbb{P}(Y \in [-t, t])$ dla dowolnej liczby $t \geq 0$.

a) Czy wynika stąd, że X oraz Y mają ten sam rozkład?

b) Czy wynika stąd, że X^2 oraz Y^2 mają ten sam rozkład?