Zadania z RP 1 - 4

1. Rzucamy dwa razy kostką. Rozważmy zdarzenia: A – za pierwszym razem wypadła liczba oczek podzielna przez 3; B – suma wyrzuconych oczek jest parzysta; C – za każdym razem uzyskaliśmy tę samą liczbę oczek. Czy zdarzenia A, B są niezależne? Czy A, B, C są niezależne?

2. Na n kartonikach zapisano n różnych liczb rzeczywistych. Kartoniki włożono do pudełka, starannie wymieszano, a następnie losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k – k-ta wylosowana liczba jest większa od poprzednich.
a) Udowodnić, że $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
b) Udowodnić, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są niezależne.

3. Liczby $1, 2, \ldots, 2n$ ustawiono losowo w ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$. Zbadać niezależność zdarzeń $\{a_1 < a_2\}$, $\{a_3 < a_4\}$, …, $\{a_{2n-1} < a_{2n}\}$.

4. Wyznaczyć najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p.

5. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie otrzymano szóstkę, jeśli wiadomo, że
a) otrzymano trzy szóstki?
b) w następnych dziewięciu rzutach otrzymano same szóstki?

6. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $p \in (0, 1]$. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 wystąpi nieskończenie wiele serii złożonych ze 100 orłów pod rząd.

7. W urnie znajduje się jedna biała kula. Wykonujemy następujący nieskończony ciąg losowań: w każdym kroku losujemy kulę, oglądamy ją, wrzucamy z powrotem oraz dokładamy czarną kulę do urny. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że nieskończenie wiele razy wyciągniemy białą kulę. Co jeśli w n-tym kroku dokładamy n czarnych kul zamiast jednej?

8. Dane są dwie miary probabilistyczne μ, ν na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
a) Załóżmy, że dla dowolnej liczby $t > 0$ mamy $\nu([-t, t]) = \mu([-t, t])$. Udowodnić, że jeśli $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jest symetryczny względem 0, to $\mu(A) = \nu(A)$.
b) Przypuśćmy, że $\mathcal{K}$ jest pewną klasą generującą $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (tzn. spełniającą $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Czy z tego, że $\mu(A) = \nu(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{K}$, wynika, iż $\mu = \nu$?

Zadania domowe: trzecia seria

1. Z talii 52 kart losujemy dwie karty bez zwracania. Rozważmy zdarzenia: A - za pierwszym razem wyciągnięto asa, B - za drugim razem wyciągnięto waleta, C - wyciągnięto karty tego samego koloru. Czy zdarzenia A, B, C są niezależne?

2. Liczby $p_1, p_2, \ldots, p_n$ są parami różnymi liczbami pierwszymi. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n\}$ losujemy liczbę. Dla $k = 1, 2, \ldots, n$, niech A_k - wylosowana liczba dzieli się przez p_k. Zbadać niezależność zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

3. Z urny zawierającej dwie białe i dwie czarne kule wyciągamy jednocześnie dwie kule, oglądamy je i odkładamy z powrotem. Procedurę tę wykonujemy sześć razy. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w co najmniej dwóch przypadkach wyciągnięte kule będą tego samego koloru.

4. Z przedziału $[0, 1]$ losujemy niezależnie nieskończenie wiele liczb. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że przedział $[\frac{1}{10}, \frac{3}{10}]$ będzie zawierał nieskończenie wiele spośród nich.