Zadania z RP 1 - 14

Uwaga: zadania domowe na następnej stronie

1. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem 2. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_nX_{n+1}}{n + 2009}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

2. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $(1/n, 1]$. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

3. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych nieujemnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Udowodnić, że jeśli $\mathbb{E}X_1 = \infty$, to

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to \infty \qquad \text{p.n.}$$

4. Dany jest ciąg $(A_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zdarzeń, $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. Udowodnić, że

$$\frac{1_{A_1} + 1_{A_2} + \ldots + 1_{A_n}}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \to 0$$

według prawdopodobieństwa.

5. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych całkowalnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n \geq 1,$$

zbiega w L^1 do $\mathbb{E}X_1$.

6. Dany jest ciąg $(N_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych (niekoniecznie niezależnych), przy czym dla $n \geq 1$ zmienna N_n ma rozkład Poissona z parametrem n. Wykazać, że $N_n/n \to 1$ w L^1.

7. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-1, 1]$. Czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2^2 + \ldots + X_n^n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny p.n.?

8. Obliczyć granice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^4 + \ldots + x_n^n}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n,$$

gdzie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ jest ustaloną funkcją ciągłą.

9. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ rozkład X_n zadany jest następująco:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2, \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2 - \frac{1}{4n^2}, \ \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{4n^2}.$$

Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

jest zbieżny prawie na pewno i wyznaczyć jego granicę.

Zadania domowe: dwunasta seria

1. Zmienne losowe X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 2. Wykazać, że ciąg
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n + n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + \sqrt{n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$
jest zbieżny prawie na pewno. Wyznaczyć granicę.

2. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 2}$ nieskorelowanych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 2$ mamy
$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \qquad \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}.$$
Dowieść, że ciąg
$$\frac{X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$
jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

3. Zmienne X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, n]$. Wykazać, że
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to \infty \quad \text{p.n.}$$

4. Dwuwymiarowe zmienne (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), $\ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na kole jednostkowym. Wykazać, że ciąg
$$\frac{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} + \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} + \ldots + \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$
jest zbieżny prawie na pewno i wyznaczyć jego granicę.