Zadania z RP 1 - 13

Uwaga: zadania domowe na następnej stronie

1. Dane są dwa ciągi $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych, przy czym dla dowolnego n zmienne X_n oraz Y_n mają ten sam rozkład.

a) Załóżmy, że $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega prawie na pewno. Czy wynika stąd, że $(Y_n)_{n\geq 1}$ zbiega prawie na pewno?

b) Załóżmy, że $p \in [1,\infty)$ jest ustalone i przypuśćmy, że $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega do stałej c w L^p. Czy wynika stąd, że $(Y_n)_{n\geq 1}$ zbiega do stałej c w L^p?

2. Załóżmy, że $(a_n)_{n\geq 1}$ jest ustalonym ciągiem liczb całkowitych nieujemnych. W urnie znajduje się jedna biała i jedna czarna kula. Wykonujemy następujący nieskończony ciąg losowań: w n-tym losowaniu ciągniemy kulę z urny, oglądamy ją, wrzucamy z powrotem, a następnie dokładamy a_n kul białych. Dowieść, że zdarzenie {nieskończenie wiele razy wyciągnięto czarną kulę} ma prawdopodobieństwo 0 lub 1.

3. Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne. Wykazać, że

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} X_n \leq 1\right) \in \{0,1\}.$$

4. Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne i mają ten sam rozkład.

a) Udowodnić, że ciąg średnich

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest albo zbieżny p.n., albo rozbieżny z prawdopodobieństwem 1.

b) Dowieść, że jeśli ten ciąg jest zbieżny p.n., to jego granica ma rozkład jednopunktowy.

5. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład normalny o średniej $1/n^2$ oraz wariancji $1/n^2$. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny prawie na pewno.

6. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ rozkład X_n zadany jest przez równości

$$\mathbb{P}\left(X_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n X_{n+1}$ jest zbieżny prawie na pewno.

7. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n = 2n) = \frac{1}{n^2}, \qquad \mathbb{P}\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = \mathbb{P}\left(X_n = -\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny p.n.

8. Dany jest ciąg $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych Rademachera. Jaki warunek musi spełniać ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$, by szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varepsilon_n$ był zbieżny p.n.?

9. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych takich, że dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na odcinku $[-n, n]$. Dla jakich wartości parametru $p > 0$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^p}$$

jest zbieżny p.n.?

10. Załóżmy, że X_1, X_2, ... jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że X_n ma rozkład wykładniczy z parametrem λ_n. Wyznaczymy warunek na ciąg $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ który jest równoważny zbieżności prawie na pewno szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$.

Zadania domowe: jedenasta seria

1. Załóżmy, że $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ są ustalonymi ciągami liczb całkowitych dodatnich. Wykonujemy następującą procedurę: w n=tym kroku, do pustej urny wrzucamy b_n kul białych i c_n kul czarnych; następnie wyciągamy z urny b_n kul. Dowieść, że zdarzenie {nieskończenie wiele razy wyci:agnięto więcej kul białych niż czarnych} ma prawdopodobieństwo 0 lub 1.

2. Zmienne X_1, X_2, … są niezależne. Dowieść, że ciąg

$$\frac{X_1 + 2X_2 + \ldots + nX_n}{e^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1 lub rozbieżny z prawdopodobieństwem 1.

3. Zmienne X_1, X_2, … są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład z gęstością $g_n(x) = n(1 - n|x|)1_{[-n^{-1},n^{-1}]}(x)$. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny p.n..

4. Zmienne X_1, X_2, … są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{n^3}, \qquad \mathbb{P}\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^3}.$$

Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *nie* jest zbieżny p.n.