Zadania z RP 1 - 12

1. Załóżmy, że $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem podzbiorów borelowskich odcinka $[0, 1]$ oraz $\mathbb{P}$ jest miarą Lebesgue'a. Niech $X_n = n1_{[0,1/n]}$, $n = 1, 2, \ldots$. Czy X_n zbiega p.n.? Czy zbiega według prawdopodobieństwa? Czy zbiega w L^1?

2. Dla ustalonej zmiennej losowej X i liczby naturalnej n, definiujemy $X_n = \min\{X, n\}$.
a) Udowodnić, że X_n zbiega prawie na pewno do X.
b) Załóżmy, że X jest całkowalna. Dowieść, że X_n zbiega do X w L^1.

3. Zmienne $(X_n)_{n\geq 1}$ są niezależnymi zmiennymi Rademachera. Udowodnić, że $(X_n)_{n\geq 1}$ nie jest zbieżny p.n.. Czy $(X_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa?

4. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$ jest zbieżny p.n. i wyznaczyć rozkład graniczny.

5. Dane są ciągi $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ zbieżne według prawdopodobieństwa do X, Y, odpowiednio. Udowodnić, że
a) $(X_n + Y_n)_{n\geq 1}$ zbiega do $X + Y$ według prawdopodobieństwa.
b) $(X_n Y_n)_{n\geq 1}$ zbiega według prawdopodobieństwa do XY.

6. Ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega w L_p do X, ciąg $(Y_n)_{n\geq 1}$ zbiega w L_q do Y, gdzie $p, q \in (1, \infty)$ spełniają warunek $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dowieść, że $(X_n Y_n)_{n\geq 1}$ zbiega w L_1 do XY.

7. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych takich, że dla $n \geq 1$ X_n ma rozkład Poissona z parametrem $1/n$. Czy $(X_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa? Czy jest zbieżny p.n.? Czy jest zbieżny w L^2? Czy jest zbieżny w $L^{3/2}$?

Zadania domowe: dziesiąta seria

1. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Dowieść, że ciąg X_1, X_1X_2, $X_1X_2X_3$, $\ldots$ jest zbieżny prawie na pewno.

2. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład normalny o średniej n^{-1} oraz wariancji n^{-2}. Wykazać, że ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny w L^2 do 0.

3. Ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych zbiega według prawdopodobieństwa do zmiennej stałej równej π. Dowieść, że ciąg $(\sin X_n)_{n\geq 1}$ zbiega według prawdopodobieństwa do 0.

4. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 2}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla ustalonego $n \geq 2$, zmienna X_n ma rozkład wykładniczy z parametrem $\ln n$. Dowieść, że $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega według prawdopodobieństwa do 0, ale nie zbiega do 0 prawie na pewno.

Wskazówka: Zbieżność według prawdopodobieństwa wykazać z definicji; aby wykazać brak zbieżności p.n., dowieść, że z prawdopodobieństwem 1 dla nieskończenie wielu n zajdzie nierówność $X_n \geq 1$.