Zadania z RP 1 - 11

1. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkłady jednostajne na odcinkach $[0,2]$ oraz $[1,4]$, odpowiednio. Wyznaczyć $\mathbb{E}X/Y$.

2. Zmienna losowa X ma wariancję $\sigma^2 < \infty$. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > 3\sigma) \leq \frac{1}{9}.$$

3. Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych i $A = (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{1/2}$. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_k\right| > t\right) \leq 2\exp(-t^2/2A^2).$$

4. Zmienna losowa X ma następującą własność: dla $n = 1, 2, \ldots$ mamy

$$\mathbb{E}|X|^n \leq 4^n.$$

Udowodnić, że $X \in L^\infty$ (tzn. istnieje taka liczba M, że $\mathbb{P}(|X| \leq M) = 1$).

5. Zmienne losowe X_1, X_2 są niezależne i mają rozkład $N(0,1)$. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $(X_1 + 2X_2, X_1 + X_2)$.

6. Zmienna losowa X ma d-wymiarowy rozkład normalny o gęstości

$$g(x) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle A(x-m), (x-m)\rangle\right].$$

Udowodnić, że $\mathbb{E}X = m$ oraz $\Lambda = A^{-1}$ (Λ oznacza tu macierz kowariancji X).

7. Zmienna losowa X ma rozkład normalny w $\mathbb{R}^d$, o średniej m i macierzy kowariancji Λ. Niech T będzie przekształceniem afinicznym $\mathbb{R}^d$ na $\mathbb{R}^k$, $k \leq d$. Udowodnić, że TX ma rozkład normalny w $\mathbb{R}^k$. Wyznaczyć jego średnią oraz macierz kowariancji.

8. Zmienna losowa $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ma d-wymiarowy rozkład normalny o diagonalnej macierzy kowariancji. Wykazać, że zmienne X_1, X_2, …, X_n są niezależne.

9. Zmienna losowa (X,Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o średniej $(0,0)$ i macierzy kowariancji

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Napisać gęstość zmiennej (X,Y).
b) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + 3Y$.
c) Wyznaczyć taką liczbę $a \in \mathbb{R}$, by zmienne $X+Y$, $X+aY$ były niezależne.

Zadania domowe: dziewiąta seria

1. Zmienne losowe X_1, X_2 są niezależne i spełniają warunki $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = 1$, $\mathbb{E}X_1^2 = \mathbb{E}X_2^2 = 2$. Wykazać, że dla dowolnego $t > 0$ zachodzi nierówność

$$\mathbb{P}(|X_1 + X_2| \geq t) \leq \frac{6}{t^2}.$$

2. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x,y) = C\exp\left(-2x^2 + 2xy - 8y^2\right).$$

Wyznaczyć C oraz podać macierz kowariancji zmiennej (X,Y).

3. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $(X, Y/X)$ oraz gęstość Y/X.

4. Jest N listów i N zaadaresowanych kopert z różnymi adresami. Każdy list odpowiada dokładnie jednemu adresowi i na odwrót. Włożono listy do kopert na chybił trafił, po jednym liście do każdej koperty. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwych kopert. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.