Zadania z RP1 - 6

1. Zmienna losowa X ma ten sam rozkład co e^{X-1}. Udowodnić, że $\mathbb{P}(X = 1) = 1$.

2. Niech Θ będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 2\pi]$.
a) Udowodnić, że tgΘ oraz tg(2Θ) mają ten sam rozkład. Co to za rozkład?
b) Udowodnić, że jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$, niezależnymi od Θ, to $\frac{X}{Y}$ oraz tgΘ mają ten sam rozkład.

3. Zmienne losowe X, Y_1, Y_2, ..., Y_n są niezależne, przy czym X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, a Y_k ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Udowodnić, że zmienna X ma ten sam rozkład co

$$X^{1/2^n} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}} |Y_1||Y_2|^{1/2}|Y_3|^{1/4} \ldots |Y_n|^{1/2^{n-1}}.$$

4. Niech $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$, $r > 0$. Mówimy, że zmienna X ma rozkład *gamma z parametrami* λ, r (ozn. $\Gamma(\lambda, r)$), jeśli ma gęstość

$$g_{\lambda,r}(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x).$$

a) Udowodnić, że jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi, $X \sim \Gamma(\lambda, r)$, $Y \sim \Gamma(\lambda, s)$, to $X + Y \sim \Gamma(\lambda, r + s)$.
b) Udowodnić, że jeśli X_1, X_2, ..., X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Exp(λ), to $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ma rozkład $\Gamma(\lambda, n)$.
c) Udowodnić, że jeśli X_1, X_2, ..., X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$, to $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ ma rozkład $\Gamma(1/2, n/2)$ (jest to tzw. rozkład *chi kwadrat o n stopniach swobody.*

5. Zmienne losowe X_1, X_2, ..., X_n są niezależne, przy czym X_k ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

6. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznaczyć rozkłady zmiennych $X + Y$ oraz X/Y.

7. Zmienne losowe X_1, X_2, ..., X_n są niezależne, przy czym X_k ma rozkład Poissona z parametrem λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.