

Zadania z RP1 - 5

1. W urnie znajduje się jedna czarna kula. Wykonujemy nieskończony ciąg losowań. W każdym losowaniu ciągniemy kulę z urny, oglądamy ją, wrzucamy z powrotem oraz dorzucamy białą kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że nieskończenie wiele razy wyciągniemy czarną kulę.

2. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $p \neq 1/2$. Niech dla $n = 2, 4, 6, \dots$, A_n oznacza zdarzenie, iż w n pierwszych rzutach wypadło tyle samo orłów, co reszek. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 zaszło skończenie wiele zdarzeń A_n .

3. Z odcinka $[0, 1]$ wybieramy kolejno nieskończenie wiele liczb X_1, X_2, \dots . Udowodnić, że

$$\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_1 X_2 \dots X_n = 0) = 1.$$

4. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą. Udowodnić że każdy ustalony z góry skończony ciąg orłów i reszek pojawi się nieskończenie wiele razy.

5. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F_\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -1, \\ \frac{1}{2}(t+1) & \text{dla } -1 \leq t < 0, \\ \frac{3}{4} & \text{dla } 0 \leq t < 4, \\ 1 & \text{dla } t \geq 4. \end{cases}$$

Obliczyć $\mathbb{P}(X = -5)$, $\mathbb{P}(2 < X \leq 5)$, $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(-1 < X < 0)$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład o ciągłej rosnącej dystrybuancie F . Wyznaczyć rozkład zmiennej $F(X)$.

7. Zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego, tzn. z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Udowodnić, że zmienne X , $1/X$ mają ten sam rozkład.

8. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć gęstości zmiennych $Y = e^X$, $Z = X^2$.