Zadania z RP1 - 4

1. Z odcinka $[0,1]$ losujemy przeliczalnie wiele punktów. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 w każdym otwartym podprzedziale tego odcinka znajdzie się co najmniej jeden punkt.

2. W urnie znajduje się jedna czarna kula. Wykonujemy nieskończony ciąg losowań. W każdym losowaniu ciągniemy kulę z urny, oglądamy ją, wrzucamy z powrotem oraz dorzucamy białą kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że nieskończenie wiele razy wyciągniemy czarną kulę.

3. Z przedziału $[0,1]$ losujemy kolejno liczby a_1, a_2, $\ldots$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że ciąg (a_n) jest rosnący od pewnego miejsca.

4. Dane są miary probabilistyczne μ na $\mathbb{R}$, ν na $\mathbb{R}^2$ takie, że dla dowolnych s, t,

$$\mu((-\infty,s])\mu([t,\infty)) = \nu((-\infty,s]\times[t,\infty)).$$

Udowodnić, że $\nu = \mu\otimes\mu$.

5. Zdarzenia A_1, A_2, $\ldots$ mają prawdopodobieństwo 1. Udowodnić, że $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. Co jeśli rodzina $\{A_i\}$ jest nieprzeliczalna?

6. σ-ciała $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\ldots$ są niezależne. Niech $A_i\in\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots$.
a) Udowodnić, że jeśli dla pewnego n, $\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = 1$, to $\mathbb{P}(A_k) = 1$ dla pewnego $k\le n$.
b) Czy analogiczne stwierdzenie ma miejsce, gdy $\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 1$?

textbf7. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w schemacie Bernoulliego $B(n,p)$?

8. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego n prób z $p=\frac{1}{2}$ będzie podzielna
a) przez 3?
b) przez 4?
Czy można znaleźć granice tych prawdopodobieństw, gdy $n\to\infty$?

9. Prawdopodobieństwo tego, że w urnie znajduje się k kostek, wynosi $\frac{2^k}{k!}e^{-2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Losujemy kolejno bez zwracania wszystkie kostki z urny i wykonujemy rzuty każdą z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uzyskamy l szóstek?

10. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w pierwszym rzucie otrzymano szóstkę, jeśli wiadomo, że
a) otrzymano trzy szóstki?

b) w następnych dziewięciu rzutach otrzymano same szóstki?

11. Rzucamy kostką aż do momentu gdy wyrzucimy piątkę bądź trzy razy szóstkę (łącznie, niekoniecznie pod rząd). Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucimy dokładnie n razy?

12. Dwie osoby rzucają po n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucą tę samą liczbę reszek?