Zadania z RP1 - 3

1. Rzucamy dwa razy kostką. Rozważmy zdarzenia: A – za pierwszym razem wypadła liczba oczek podzielna przez 3; B – suma wyrzuconych oczek jest parzysta; C – za każdym razem uzyskaliśmy tę samą liczbę oczek. Czy zdarzenia A, B, C są niezależne? Czy są parami niezależne?

2. Na n kartonikach zapisano n różnych liczb rzeczywistych. Kartoniki włożono do pudełka, dobrze wymieszano, a następnie losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k – k-ta wylosowana liczba jest większa od poprzednich.

a) Udowodnić, że $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

b) Udowodnić, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są niezależne.

3. Dane są dwie miary probabilistyczne μ, ν na prostej.

a) Załóżmy, że dla dowolnej liczby $t > 0$ mamy $\mu([-t,t]) = \nu([-t,t])$. Wykazać, że jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem borelowskim symetrycznym względem 0, to $\mu(A) = \nu(A)$.

b) Załóżmy, że $\mathcal{K}$ jest podzbiorem $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ generującym wszystkie podzbiory borelowskie prostej. Czy z tego, że $\mu(A) = \nu(A)$ dla wszystkich $A \in \mathcal{K}$ wynika, że $\mu = \nu$?

4. Dana jest miara probabilistyczna μ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ oraz zbiór borelowski A taki, że

$$\mu(A \cap (-\infty, t]) = \mu(A)\mu((-\infty, t])$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej t. Udowodnić, że $\mu(A) = 0$ lub $\mu(A) = 1$.

5. W urnie znajduje się $2n$ kul ponumerowanych liczbami od 1 do $2n$, $n \geq 1$. Losujemy kule bez zwracania aż do momentu, gdy wylosujemy kulę z parzystym numerem. Niech k będzie ustaloną liczbą nie większą niż $n+1$. Zbadać, czy zdarzenia A - losowaliśmy k razy, B - liczba na ostatniej wylosowanej kuli to 2, są niezależne.

6. Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi, a p, q - takim liczbami rzeczywistymi nieujemnymi, że $p + q = 1$. Udowodnić, że

$$(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geq 1.$$