

Zadania z RP1 - 14

1. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-1, 1]$. Czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2^2 + \dots + X_n^n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

jest zbieżny p.n.?

2. Obliczyć granice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \frac{x_1 + x_2^2 + \dots + x_n^n}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

gdzie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ustaloną funkcją ciągłą.

3. Dany jest ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$ niezależnych całkowalnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Udowodnić, że ciąg $(n^{-1} \max_{i \leq n} X_i)_{n \geq 1}$ zbiega według prawdopodobieństwa do 0.

4. Dany jest ciąg (X_n) zbieżny p.n. do X , spełniający $\mathbb{E}|X_n|^p \rightarrow \mathbb{E}|X|^p$. Udowodnić, że X_n zbiega do X w L^p .