Zadania z RP1 - 12

1. Dana jest funkcja $G : [0, \infty) \to [0, \infty)$ taka, że $\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty$. Załóżmy, że $(X_i)_{i\in I}$ jest rodziną zmiennych losowych takich, że $\sup_i \mathbb{E}G(|X_i|) < \infty$. Udowodnić, że rodzina ta jest jednostajnie całkowalna.

2. Podać warunek na zbiór Λ, aby rodzina zmiennych losowych była jednostajnie całkowalna:
a) $(X_i)_{i\in\Lambda}$, $X_i \sim$Exp(i), $\Lambda \subset (0, \infty)$.
b) $(X_i)_{i\in\Lambda}$, $X_i \sim$Poiss(i), $\Lambda \subset (0, \infty)$.
c) $(X_{a,b})_{(a,b)\in\Lambda}$, $X_{a,b} \sim \mathcal{U}(a, b)$.

3. Dany jest ciąg zmiennych losowych (X_n), gdzie $X_n \sim$Exp(λ_n). Udowodnić, że (X_n) jest zbieżny w L^1 wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w L^p.

4. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych.
a) Udowodnić, że ciąg
$$\frac{X_1 + 2X_2 + \ldots + nX_n}{n}$$
jest albo zbieżny p.n. z prawdopodobieństwem 1, albo rozbieżny p.n. z prawdopodobieństwem 1.
b) Załóżmy, że podany ciąg jest zbieżny p.n.. Udowodnić, że jego granica jest stała p.n.

5. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem 2. Udowodnić, że ciąg
$$\frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_nX_{n+1}}{n + 2009}$$
jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

6. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $(1/n, 1]$. Udowodnić, że ciąg
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$
jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

7. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych nieujemnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Udowodnić, że jeśli $\mathbb{E}X_1 = \infty$, to
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to \infty$$
prawie na pewno.

8. Dany jest ciąg (A_n) niezależnych zdarzeń, $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. Udowodnić, że

$$\frac{1_{A_1} + 1_{A_2} + \ldots + 1_{A_n}}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \to 0$$

według prawdopodobieństwa.

9. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych całkowalnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

zbiega w L^1 do $\mathbb{E}X_1$.