Zadania z RP1 - 11

1. W urnie znajduje się 1000 kul, ponumerowanych od 1 do 1000. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że losując 2000 razy ze zwracaniem nie wyciągniemy ani razu kuli z numerem 1. Podać oszacowanie na błąd przybliżenia.

2. Tekst broszury zawiera $n = 100000$ znaków. W trakcie pisania (na komputerze) każdy znak może zostać błednie wprowadzony z prawdopodobieństwem $0,001$. Z kolei redaktor znajduje każdy z błędów z prawdopodobieństwem $0,9$, po czym tekst wraca do autora, który znajduje każdy z pozostałych błędów z prawdopodobieństwem $0,5$. Oszacować prawdopodobieństwo tego, że po obu korektach broszura będzie zawierała nie więcej niż 3 błędy. Podać oszacowanie na błąd przybliżenia.

3. Na Ursynowie ginie średnio 7 samochodów tygodniowo. Jaka jest szansa, że jutro nie zostanie ukradziony żaden samochód?

4. Dany jest ciąg $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych Rademachera.
a) Czy $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny p.n.?
b) Czy $((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)/n^2)_{n\geq 0}$ jest zbieżny p.n.?

5. Dany jest ciąg $(N_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych, przy czym dla każdego n, zmienna N_n ma rozkład Poissona z parametrem $-\log(1-(n+1)^{-\alpha})$ ($\alpha \geq 1$ ustalone).
a) Udowodnić, że jeśli $\alpha > 1$, to $(N_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny p.n.
b) Udowodnić, że jeśli $\alpha = 1$ i $N_1, N_2, \ldots$ są niezależne, to $(N_n)_{n\geq 1}$ nie jest zbieżny p.n. Co jeśli ominiemy założenie o niezależności?

6. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych o rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$ jest zbieżny p.n. i wyznaczyć rozkład graniczny.

7. Dany jest ciąg (X_n) scentrowanych zmiennych o rozkładach jednostajnych, zbieżny p.n. do X. Udowodnić, że X ma rozkład jednostajny lub jest stała p.n. Udowodnić analogiczne stwierdzenie dla zbieżności według prawdopodobieństwa.

8. Dane są niezależne ciągi (X_n), (Y_n) zbieżne p.n. do zmiennych X, Y. Udowodnić, że X, Y są niezależne oraz, jeśli dla każdego n zmienne X_n oraz Y_n mają ten sam rozkład, to X i Y też mają ten sam rozkład.

9. Dany jest ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\geq 1}$ taki, że dla dowolnego n, zmienna X_n ma rozkład wykładniczy z parametrem $\ln(n+1)$. Czy ten ciąg jest zbieżny według prawdopodobieństwa? Czy jest zbieżny p.n.?

10. Dany jest ciąg $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych Rademachera. Udowodnić, że dla dowolnego $p > 1/2$ ciąg

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n^p}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

11. Dany jest ciąg $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych Rademachera oraz ciąg liczbowy $(a_n)_{n\geq 1}$ spełniający $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Udowodnić, że $\sum_{n=1}^{n} a_n \varepsilon_n$ jest zbieżny p.n.

12. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 0}$ niezależnych zmiennych losowych taki, że dla każdego $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = n^{-2}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2n^{-2}.$$

Zbadać zbieżność p.n. szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$.