Zadania z RP1 - 10

1. Zmienna losowa X ma wariancję $\sigma^2 < \infty$. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > 3\sigma) \leq \frac{1}{9}.$$

2. Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Niech $A = (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{1/2}$. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_k\right| > t\right) \leq 2\exp(-t^2/2A^2).$$

3. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i spełniają warunek $X_i \in [a_i, b_i]$ dla każdego n. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $n \geq 1$. Udowodnić, że dla dowolnego n,

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}S_n| \geq t) \leq 2\exp\left(-2t^2 / \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2\right).$$

4. Zmienne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$, $k = 1, 2, \ldots$. Niech $S_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że

$$\limsup \frac{S_n}{\sqrt{2n\log n}} \leq 1 \qquad \text{p.n.}$$

oraz

$$\liminf \frac{S_n}{\sqrt{2n\log n}} \geq -1 \qquad \text{p.n.}.$$

5. a) Zmienna losowa X ma następującą własność: dla każdej liczby naturalnej n mamy

$$\mathbb{E}|X|^n \leq \binom{2n}{n}.$$

Udowodnić, że istnieje taka liczba M, że $|X| \leq M$ p.n.

b) Udowodnić,że dla dowolnej zmiennej losowej $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

$$\lim_{p\to\infty} ||X||_p = ||X||_\infty.$$