Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa 1, 17 VI 2009, 9:00, Grupa A

Czas: 180 minut. Pełne rozwiązania piszemy **na osobnych kartkach** *wraz z imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz grupą (A lub B). Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.*

1. (10 p.) Rzucono 400 razy monetą dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi 1/2. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że liczba orłów nie będzie się różniła od liczby reszek o więcej niż 100.

2. (12 p.) Zakładamy, że liczba dzieci w rodzinie, losowo wybranej z pewnej populacji, jest zmienną losową ν o rozkładzie geometrycznym: $\mathbb{P}(\nu = n) = p(1-p)^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, gdzie $0 < p < 1$. Jeżeli rodzina ma n dzieci, to liczba chłopców w tej rodzinie ma rozkład Bernoulliego z parametrami n, 1/2. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że rodzina ma dokładnie 5 dzieci, jeśli wiadomo, że ma dokładnie 2 chłopców.

3. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Poissona z parametrem 2, a Y ma rozkład wykładniczy z parametrem 3. (6p.) Obliczyć $\mathbb{E}\frac{1}{X+1}$. (6p.) Obliczyć $\mathbb{P}(X = [Y])$.
Uwaga: $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

4. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (5p.) Wyznaczyć gęstość zmiennej (X, Y). (7p.) Obliczyć $\mathbb{E}(XY|X)$.

5. (12p.) Zmienne losowe X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(X_n = -\frac{1}{2}n\right) = \mathbb{P}\left(X_n = \frac{1}{2}n\right) = \frac{1}{2}.$$

Czy ciąg

$$Y_n = \frac{\sin(\pi X_1) + \sin(\pi X_2) + \ldots + \sin(\pi X_n)}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny p.n.? Jeśli tak, jaka jest jego granica?

6. (4p.) Sformułować twierdzenie Kołmogorowa o trzech szeregach.
(8p.) Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych takich, że dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na odcinku $[-n, n]$. Dla jakich wartości parametru $p > 0$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^p}$$

jest zbieżny p.n.?