Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa 1, 25 IV 2009, grupa A.

Czas trwania kolokwium: 120 minut. Rozwiązania różnych zadań piszemy ***na osobnych kartkach****, wraz z imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Proszę także zaznaczyć grupę.*

1. (6 p.) Kij o długości 1 złamano losowo w dwóch miejscach. Niech X oznacza długość najkrótszego z powstałych trzech kawałków. Wyznaczyć rozkład zmiennej X, jej wartość oczekiwaną i wariancję.

2. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{9}x^2 1_{[0,3]}(x).$$

a) (3 p.) Wyznaczyć $\mathbb{P}([X] = 0|[X] \leq 1)$.
b) (3 p.) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $Y = X^3$.

Uwaga: Dla $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

3. Rzucamy prawidłową kostką aż do momentu, gdy wśród wyrzuconych liczb oczek znajdzie się czwórka oraz liczba podzielna przez 3. Niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów.
a) (3 p.) Wyznaczyć $\mathbb{P}(X \geq 10)$.
b) (3 p.) Obliczyć $\mathbb{E}X$.

4. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1.
a) (2 p.) Wyznaczyć rozkład zmiennej $\frac{X}{X+Y}$.
b) (4 p.) Udowodnić, że zmienne $\frac{X}{X+Y}$ oraz $X + Y$ są niezależne.

5. (6 p.) Dany jest ciąg (X_n) takich zmiennych losowych, że zmienna X_n ma rozkład Poissona z parametrem $2n$, $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 ciąg (X_n) zbiega do nieskończoności.

Uwaga: Być może przyda się wzór Stirlinga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1.$$