Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa 1, 7 V 2009

1. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = e^x 1_{\{0 \le y \le x \le 1\}}.$$

a) (3 p.) Wyznaczyć rozkład zmiennej Y/X.
b) (3 p.) Czy zmienne X, Y/X są niezależne?

2. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{2}{x^3} 1_{[1,\infty)}(x).$$

a) (2 p.) Obliczyć $\mathbb{E}X1_{\{|X| \le 5\}}$.
b) (4 p.) Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej e^X.

3. Danych jest n listów i n zaadresowanych kopert. Wkładamy losowo listy do kopert, po jednym liście do każdej koperty. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwej koperty.
a) (3 p.) Obliczyć $\mathbb{E}X$.
b) (3 p.) Obliczyć $\mathrm{Var}X$.

4. (6 p.) Dany jest kwadrat o boku 1. Na brzegu tego kwadratu wybrano losowo dwa punkty. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że są one odległe o więcej niż 1.

5. (6 p.) Dany jest ciąg (ε_n) zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie $\mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$, oraz ciąg (η_n) taki, że $\mathbb{P}(\eta_n \neq \varepsilon_n) = 1/n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 ciąg $\big((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n) - (\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n)\big)$ jest zbieżny.