

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa I

19 kwietnia 2008r.

GRUPA A

Zadania A1-A5 są warte po 10 punktów, a zadanie A6-20 punktów. Maksymalnie można uzyskać 50 punktów.

A1. Gracze X, Y, Z rzucają kolejno i właśnie w tej kolejności prawidłową kostką. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że Y wyrzuci jedynkę zanim X wyrzuci szóstkę a Z piątkę.

A2. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeżeli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, jednak również nie-dyslektyk może popełnić więcej niż 5 błędów – dzieje się tak z prawdopodobieństwem 0,1.

Jasio popełnił w teście 6 błędów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście też popełni co najmniej 6 błędów?

A3. W urnie znajduje się 100 ponumerowanych kul. Losujemy bez zwracania 25 spośród nich. Niech X oznacza największy wylosowany numer. Wyznacz rozkład X .

A4. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością:

$$g_X(x) = \frac{1}{2} \sin x \cdot \mathbf{1}_{[0, \pi]}(x).$$

Wyznacz $\mathbb{P}((\sin X)^2 \leq \frac{1}{2})$ oraz wyznacz rozkład zmiennej losowej $\max(\sin X, \frac{1}{2})$.

A5. W urnie znajdują się 3 białe oraz 4 czarne kule. Losujemy kolejno kule z urny, przy czym jeżeli wyciągnęliśmy kulę czarną, to wrzucamy ją z powrotem do urny, a jeżeli kulę białą, to odkładamy ją na bok. Niech X oznacza numer losowania, po którym w urnie będą same czarne kule. Oblicz $\mathbb{E}X$.

A6*. Z przedziału $[-2, 2]$ losujemy kolejno liczby a_1, a_2, \dots , przy czym wybór każdej liczby jest niezależny od pozostałych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący. Odpowiedź starannie uzasadnij.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa I

19 kwietnia 2008r.

GRUPA B

Zadania B1-B5 są warte po 10 punktów, a zadanie B6-20 punktów. Maksymalnie można uzyskać 50 punktów.

B1. Gracze A, B, C rzucają kolejno i właśnie w tej kolejności prawidłową kostką. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że A wyrzuci szóstkę, zanim B wyrzuci jedynkę a C dwójkę.

B2. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeżeli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, jednak również nie-dyslektyk może popełnić więcej niż 5 błędów – dzieje się tak z prawdopodobieństwem 0,1.

Jasio popełnił w teście 6 błędów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście też popełni co najmniej 6 błędów?

B3. W urnie znajdują się 3 zielone kule oraz 7 niebieskich. kule. Losujemy kolejno kule z urny, przy czym jeżeli wyciągnęliśmy kulę niebieską, to wrzucamy ją z powrotem do urny, a jeżeli kulę zieloną, to odkładamy ją na bok. Niech X oznacza numer losowania, po którym w urnie będą same kule niebieskie. Oblicz EX .

B4. W urnie znajduje się 100 ponumerowanych kul. Losujemy bez zwracania 20 spośród nich. Niech X oznacza najmniejszy wylosowany numer. Wyznacz rozkład X .

B5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g_X(x) = \frac{1}{2} \cos x \cdot \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x).$$

Oblicz $\mathbb{P}(4X^2 \geq \pi X)$ oraz wyznacz rozkład zmiennej losowej $\min(X, 1)$.

B6*. Z przedziału $[-2, 2]$ losujemy kolejno liczby a_1, a_2, \dots , przy czym wybór każdej liczby jest niezależny od pozostałych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący. Odpowiedź starannie uzasadnij.