Imię i nazwisko ....

Numer indeksu ....

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa 1
16 czerwca 2008r.

TEST

To jest część testowa egzaminu. Na tej kartce prosimy wpisywac same odpowiedzi, BEZ RACHUNKÓW. Czas pracy: 100 minut

1.(2p) Z urny, w której jest 15 kul kolejno ponumerowanych kul losujemy ze zwracaniem 7 razy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś wynik się powtórzy?

2.(2p) Z talii 24 kart (od asów do dziewiątek) zginęła 10 trefl. Z takiej talii losujemy jedną kartę. Czy niezależne są zdarzenia:
(a) A – wylosowano damę i B – wylosowano pika? T/N ....
(b) C – wylosowano króla i B – wylosowano trefla? T/N ....

3.(2p) Mamy 10 prawidłowych kostek do gry, i jedną oszukaną – która ma same szóstki. Wybrano losowo jedną z kostek (z jednakowym prawdodpodobieństwem każdą) i rzucono nią dwuktotnie. Wypadły dwie szóstki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucano oszukaną kostką?

4.(3p) Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości $g_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2} - \frac{y^2}{8}}$. Wtedy:

$\mathbb{E}X =$ ...., $\mathrm{Var}\, X =$ ...., $g_X(x) =$ ....

5.(3p) Podaj i udowodnij nierówność Czebyszewa.

6.(2p) Zmienne losowe ξ i η są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[0, 1]$ Oblicz:

$$\mathrm{Var}\,(\mathbb{E}(\xi\eta^2|\eta)) = \text{.....................................}$$

7.(2p) X i Y są niezależne, X ma rozkład wykładniczy z parametrem 2, a Y ma rozkład dwupunktowy: $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3} = 1 - \mathbb{P}(X = 2)$. Oblicz

$$\mathbb{P}(|X - Y| \le 1) = \text{..}$$

8.(3p) X_n oraz X są zmiennymi losowymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Uzupełnij zdania:

X_n zbiega do X według prawdopodobieństwa $\Leftrightarrow$...

X_n zbiega do X prawie na pewno $\Leftrightarrow$...

Jeżeli $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa oraz $\mathbb{P}(X = 1) = 1$, to X_n [$\begin{array}{c}\text{musi}\\ \text{nie musi}\end{array}$] .... zbiegać do X prawie na pewno.

9.(2p) Uzupełnij sformułowanie "twierdzenia o dwóch szeregach" Kołmogorowa: $X_1, X_2, ...$ jest ciągiem niezależnych, rzeczywistych zmiennych losowych.

Jeżeli.................... oraz ...., to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny ....

10.(2p) Uzupełnij: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ jest gęstością rozkładu zmiennej losowej X, jeżeli:

1) ....,
2) ....,
3) ....

11.(2p) X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Czy zmienna losowa X^2 ma gęstość? Zaznacz właściwą odpowiedź i ew. uzupełnij.

TAK, $g(x) =$ ....

NIE, gęstość nie istnieje.

12.(2p) Podaj warunki, które musi spełniać funkcja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, by była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej rzeczywistej.

13.(3p) O zmiennych losowych $X, Y, Z_1, Z_2...$ wiadomo tylko tyle, że są określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej, oraz że rozkład Z_n dany jest przez $\mathbb{P}(Z_n = n) = 2^{-n}$, $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - 2^{-n}$, $n = 1, 2, ...$ Przyjmujemy $X_n = X^2 \mathbf{1}_{|Y| \geq \frac{1}{n}} + Z_n \mathbf{1}_{|Y| < \frac{1}{n}}$. Czy wynika stąd, że:

a) ciąg X_n jest zbieżny według prawdopodobieństwa? ....(T/N)

b) ciąg X_n jest zbieżny prawie na pewno? .... (T/N)

c) Jeżeli któraś z odpowiedzi brzmi TAK, to co jest granicą?

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa 1
16 czerwca 2008r.

ZADANIA

Ta część egzaminu składa się z pięciu równopunktowanych zadań (po 10 punktów za każde zadanie). W tej części prosimy o staranne uzasadnione rozumowania prowadzące do rozwiązania. Rozwiązanie każdego zadania prosimy pisać na oddzielnej kartce.
Czas pracy: 120 minut.

1. Wyznacz prawdodpodobieństwo tego, że przy losowym uporządkowaniu talii 52 kart żadne dwa kiery nie sąsiadują ze sobą.

2. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$. Niech $T = [X]$, $R = \{X\}$ (dla $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ oraz $\{x\}$ oznaczają odpowiednio, część całkowitą i część ułamkową liczby x). Wyznacz rozkłady zmiennych losowych T, R oraz ich wartości oczekiwane. Czy są to niezależne zmienne losowe?

3. Zmienne losowe $\mathbb{X}_1 = (X_1, Y_1)$, $\mathbb{X}_2 = (X_2, Y_2)$, ... są niezależne i każda z nich ma rozkład jednostajny na kole jednostkowym $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Niech $Z_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$, $n = 1, 2, ...$ Udowodnij, że ciąg zmiennych losowych $\frac{Z_1 + ... + Z_n}{n}$ jest zbieżny prawie na pewno gdy $n \to \infty$ i wyznacz jego granicę.

4. Rzeczywista zmienna losowa X ma taką własność, że $\mathbb{E}|X|^n \leq 2008^n$, dla $n = 1, 2, ...$ Wykaż, że istnieje taka liczba M, że $\mathbb{P}(|X_n| \leq M) = 1$.

5. r_1, r_2, r_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie $\mathbb{P}(r_i = 1) = \mathbb{P}(r_i = -1) = \frac{1}{2}$. Wyznacz

$$\mathbb{E}(r_1 r_2 | r_1 + r_3) \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}(r_1 + r_2 + r_3 | r_1 r_2 r_3).$$